Newton C. A. da Costa
Décio Krause

NOTAS DE LÓGICA

Parte I:
Lógicas Proposicionais Clássica e Paraconsistente

APÊNDICE B
(Texto Preliminar)

FLORIANÓPOLIS
2004

Conteúdo

Apêndice B
Indução e Recursão

0.1 Indução

Um tipo de construção muito útil em lógica e em matemática é aquela que nos permite 'construir' um certo subconjunto de um dado conjunto X partindo de um elemento qualquer de X (ou de alguns elementos) e, aplicando certas operações, exprimir a idéia do "e assim por diante". O conjunto procurado é o 'menor' conjunto que contém o(s) elemento(s) destacado(s) e é fechado para as operações em questão. Qualquer elemento deste subconjunto será um elemento de X que pode ser obtido a partir do(s) elemento(s) inicial(ais) pela aplicação das operações em selecionadas um número finito de vezes.

Por simplicidade, consideremos um caso particular no qual há conjunto inicial

$$B \subseteq X$$

e uma classe F de funções com pelo menos dois elementos f e g, sendo

$$f : X \times X \mapsto X \ \text{ e } \ g : X \mapsto X.$$

Sendo $a, b \in B$, o conjunto procurado, que vamos chamar de C, conterá por exemplo

$$b, f(b, b), g(a), f(g(a), f(a, b)), \ \text{'}\textit{e assim por diante}\text{'}$$

Dizemos que $S \subseteq X$ é *indutivo* se $B \subseteq S$ e S é fechado para as operações f e g. Seja C a interseção de todos os subconjuntos indutivos de X; é fácil ver que C é indutivo e que é o 'menor' conjunto indutivo, no sentido de estar contido em todos os outros. Este C é dito *gerado* por B mediante f e g. Vem então o seguinte

Princípio de Indução Suponhamos que C seja gerado por B por meio das funções em F. Se S é um subconjunto de C que inclui B e é fechado relativamente às operações de F, então $C = S$.

Como obter este conunto C? Um modo de gerar C a partir de $B \subseteq X$ por meio de funções em F é o seguinte. Chamamos de *seqüência de formação* uma seqüência finita

$$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$$

de elementos de X tais que, para cada $i \leq n$,

$x_i \in B$ ou

$x_i = f(x_j, x_k)$, com $j, k < i$ ou

$x_i = g(x_j)$, com $j < i$.

Assim, C será o conjunto de todos os x que são o último elemento de uma seqüência de formação. Para obtê-lo, basta consider C_n como o conjunto de todos os x cujas seqüências têm comprimento n. Então vem que

$$C_1 = B \text{ e } C = \bigcup_n C_n.$$

Um exemplo importante, que explica o próprio sentido da palavra 'indução' (finita) em matemática é o seguinte.[1] Suponha que X é o conjunto dos números naturais, que chamaremos, como é usual, de $\mathbb{N}$. Sejam ainda $B = \{0\}$ e $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ a única função em F, dita 'função sucessor', definida assim: para cada $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$. Deste modo, as seqüências $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ ficam:

$$\langle 0 \rangle$$

$$\langle 0, 1 \rangle$$

$$\langle 0, 1, 2 \rangle$$

[1] A palavra 'finita' foi colocada aqui entre parênteses porque há outras formas de indução distintas da que estamos considerando, como a indução *transfinita*.

$$\vdots$$

Então, sendo C_n como acima para $n \in \mathbb{N}$, temos que o conjunto resultante C é o próprio conjunto $\mathbb{N}$, ou seja,

$$C = \bigcup_n C_n = \mathbb{N}.$$

Em outras palavras, $\mathbb{N}$ é o 'menor' conjunto indutivo gerado a partir do zero (na verdade, a partir do conjunto cujo único elemento é o zero) por meio da função sucessor. Em outras palavras, como C é o 'menor' conjunto indutivo, então $\mathbb{N}$ é o 'menor' conjunto de números naturais que contém o zero e o sucessor de cada um de seus elementos, ou, como expressamos informalmente,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Vejamos um outro exemplo utilzando aquilo que já aprendemos antes. Aqui, X é o conjunto de todas as *expressões* da linguagem do Cálculo Proposicional Clássico estudado anteriormente. Queremos caracterizar o conjunto C de suas *fórmulas*. Para isso, vamos considerar um conjunto inicial B de todas as variáveis proposicionais $A, B, C, \ldots$ (que, como você deve lembrar, são fórmulas). Então, para F tomamos o conjunto cujos elementos são as funções abaixo definidas, para α e β fórmulas quaisquer:

$\xi_{\neg}(\alpha) = \neg\alpha$

$\xi_{\wedge}(\alpha, \beta) = \alpha \wedge \beta$

$\xi_{\vee}(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$

$\xi_{\rightarrow}(\alpha, \beta) = \alpha \rightarrow \beta$

$\xi_{\leftrightarrow}(\alpha, \beta) = \alpha \leftrightarrow \beta$

Tomamos agora todas as seqüências finitas $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ com $x_0 \in B$ (ou seja, x_0 é uma variável proposicional) e para cada x_i restante, ou $x_i = \xi_{\neg}(x_j)$, com $j < i$ ou $x_i = \xi_*(x_j, x_k)$, com $j, k < i$ e $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. O conjunto de todos os x_n assim obtidos é precisamente o conjunto das fórmulas de nosso cálculo. O Princípio da Indução vai dizer que esse conjunto é o *menor* conjunto que contém todas as fórmulas.

0.2 Recursão

Como anteriormente, são dados X e $B \subseteq X$, além de duas funções f e g como acima (como acima, ficaremos restritos a este caso particular mais simples). Seja C o conjunto gerado por B a partir de f e g. O problema agora é definir uma função h sobre C qua aja *resursivamente*. Intuitivamente, isso funciona do seguinte modo: supomos que seja dados

1. Regras para computar $h(x)$, para cada $x \in B$
2. Regras para computar $h(f(x, y))$, fazendo uso de $h(x)$ e de $h(y)$
3. Regras para computar $h(g(x))$, usando-se $h(x)$.

Tomemos um exemplo. Seja B um conjunto qualquer de variáveis proposicionais do nosso cálculo. Vimos que uma *valoração* é uma aplicação $v : B \mapsto \mathbf{2}$; como anteriormente, se $v(P) = 1$, dizemos que P é *verdadeira* para a valoração dada, e P será *falsa* se $v(P) = 0$. Seja agora o conjunto C gerado por B a partir das funções $\xi_\neg, \xi_\wedge, \xi_\vee, \xi_\to$ e $\xi_\leftrightarrow$ acima.

Vamos agora definir, para cada valoração v, uma aplicação $v' : C \mapsto \mathbf{2}$ como fizemos na seção**??**, ou seja:

(a) Para cada $P \in B$, $v'(P) = v(P)$

(b) $v'(\neg\alpha) = (v'(\alpha))^*$, onde x^* denota o complemento de x na álgebra de Boole $\mathbf{2}$

(c) $v'((\alpha \to \beta)) = (v'(\alpha))^* \sqcup v'(\beta)$, etc.

Como dito naquela oportunidade, a questão agora é provar que há uma única v que preenche as condições acima. O que garante isso é o Teorema da Recursão visto a seguir.

0.3 O Teorema da Recursão

Como deve ter ficado claro acima, a idéia intuitiva da *indução* é a de, por assim dizer, legitimar o 'e assim por diante'. Ou seja, admita que iniciamos com um certo elemento a (em algum conjunto X) e, mediante alguma função h definida sobre X, obtemos $h(a)$, $h(h(a))$, 'e assim por diante'. Ou seja, a função h, tomada reiteradamente, fornece algum modo de 'passar de um elemento de X para outro', e deste para outro ainda, e assim por diante. A partir dessa função h definimos então uma outra função $f : \mathbb{N} \to X$ pondo $f(0) = a$, $f(1) = h(a) = h(f(0))$, $f(2) = h(1) = h(f(1))$, e (de novo!!) assim por diante. A função f provê então a idéia de que formamos uma sequência[2] mediante os valores sucessivos da função h; o 'e assim por diante' seria justificado se conseguirmos explicar adequadamente o processo de indução. O artifício da indução (i.e., a sua 'descrição precisa') teria que dizer que faz sentido haver uma função como a f acima, definível a partir de uma tal h. Mas, será que há mesmo uma tal função? A garantia desse fato vem do teorema abaixo.

Teorema 0.1 (Recursão) *Seja $\mathcal{P}$ um sistema de Peano e X um conjunto qualquer tal que $a \in X$. Ademais, seja $h : X \to X$ uma função. Então existe uma única função $f : \mathbb{N} \to X$ tal que:*

$$f(0) = a$$
$$f(Sn) = h(f(n)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Demonstração: Uma função de $\mathbb{N}$ em X é um certo conjunto de pares ordenados da forma $\langle n, x \rangle$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Chamemos de C a coleção de todos os subconjuntos A de $\mathbb{N} \times X$ para os quais $\langle 0, a \rangle \in A$ e que $\langle Sn, h(x) \rangle \in A$ sempre que $\langle n, x \rangle \in A$. Evidentemente esta coleção não é vazia, posto que ao menos $\mathbb{N} \times X$ tem estas propriedades. Seja f a interseção de todos os conjuntos desta coleção, a qual pertence a C, ou seja, tem também as propriedades desejadas. Se mostrarmos que f é uma função, teremos obtido o que solicita o teorema. Faremos a prova por indução, olhando-a do seguinte modo: o que estamos tentando provar é que se $\langle n, x \rangle \in f$ e se $\langle n, y \rangle \in f$, então $x = y$. Ou seja, a 'propriedade' (vamos designá-la 'P') de números naturais a ser investigada ser uma propriedade de todos os números naturais é a seguinte: "para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único x tal que $\langle n, x \rangle \in f$". Inicialmente veremos que 0 tem esta propriedade. Já temos que $\langle 0, a \rangle \in f$ por definição de f; resta provar que não há outro $b \neq a$ tal que $\langle 0, b \rangle \in f$. Com efeito, se há um tal b, podemos considerar o conjunto $f - \{\langle 0, b \rangle\}$, que ainda contém $\langle 0, a \rangle$ e contém $\langle Sn, h(x) \rangle$ se contém $\langle n, x \rangle$; con efeito, como para todo n tem-se que $Sn \neq 0$, então $\langle 0, b \rangle \neq \langle Sn, h(n) \rangle$, ou seja, o elemento eliminado de f não é por certo

[2] Uma sequência de elementos de um conjunto X nada mais é do que uma função de $\mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais) em X.

$\langle Sn, h(x)\rangle$. Consequentemente, o conjunto $f - \{\langle 0, b\rangle\}$ pertence à coleção C definida acima. mas então há um 'menor' conjunto (a saber, $f - \{\langle 0, b\rangle\}$) que pertence à coleção e tem as propriedades requeridas para f, e f não poderia ser o 'menor' deles (a interseção de todos os conjuntos da coleção C). Logo não pode haver tal b e portanto 0 tem a propriedade acima mencionada. Suponhamos agora que n tem a propriedade P (hipótese de indução). Queremos mostrar que Sn também tem a propriedade P. Para tanto, note que a hipótese de indução indica que existe um único $x \in X$ tal que $\langle n, x\rangle \in f$. Mas então (por definição de f), temos que $\langle Sn, h(x)\rangle \in f$. Se fosse o caso de $Sn \notin f$ (isto é, se Sn não tem a propriedade P), então $\langle Sn, y\rangle \in f$ para algum $y \neq h(x)$. Formemos, em analogia como o que fizemos acima, o conjunto $f - \{\langle Sn, y\}$, o qual contém $\langle 0, a\rangle$ como elemento, posto que $0 \neq Sn$ para todo n e que conjunto diminuído contém $\langle Sm, h(t)\rangle$ sempre que contém $\langle m, t\rangle$. Então, das duas uma: $m = n$ ou $m \neq n$. No primeiro caso, o conjunto diminuído contém $\langle n, h(x)\rangle$ posto que $h(x0 \neq y$ pela imposição que fizemos acima. Se por outro lado $m \neq n$, então como $Sm \neq Sn$ (a função sucessor é injetiva), vem que o conjunto diminuído contém $\langle Sm, h(t)\rangle$. Em outras palavras, o 'conjunto diminuído' acima pertenceria à família C e seria 'menor' que f, contra a hipótese. Logo, Sn tem que ter a propriedade P e f é de fato uma função, como queríamos demonstrar.∎

Bibliografia

[Ari49] Aristóteles, *Prior and Posterior Analytics*, introduction, text and commentary by W. D. Ross, Oxford, 1949.

[Arr90] Arruda, A. I., *N. A. Vasiliev e a Lógica Paraconsistente*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Universidade de Campinas, 1990 (Coleção CLE Vol. VII).

[BenPut96] Benacerraff, P. and Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics: selected readings*, 2nd. ed., Cambridge Un. Press, 1996.

[Bon06] Bonola, R., *La geometria non-euclidea: esposizione storico-critica del sul sviluppo*, Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1906, (`http://historical.library.cornell.edu`)

[Bou68] Bourbaki, N., *Theory of sets*, Hermann & Addison-Wesley, 1968.

[Boy74] Boyer, C. B., *História da Matemática*, Edgard Blucher-EdUSP, 1974.

[Cam00] Cameron, P. J., *Sets, Logic and Categories*, Springer Verlag, 2nd. ed., 2000.

[Cig94] Cignoli, R. L. O., DÓttaviano, I. M. L. e Mundici, D., *Álgebra das Lógicas de Łukasiewicz*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Coleção CLE no. 12, 1994.

[Coh89] Cohen, D. W., *An introduction to Hilbert spaces and quantum logic*, New York, Springer-Verlag, 1989.

[Col03] Colyvan, M., 'Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL

= <http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/mathphil-indis/>.

[Cor73] Corcoran, J., 'Meanings of implication', *Dialogos* **25** (1973), 59–76. Reproduzido como 'Significados de la implicacion', *Agora*, **5** (1985), 279–294.

[Cos63] da Costa, N. C. A., *Sistemas Formais Inconsistentes*, NEPEC, Rio de Janeiro, 1963 (reeditado pela Editora da Universidade Federal do Paraná, 1993).

[Cos82] da Costa, N. C. A., 'Statement of purpose', *J. Non-Classical Logic* **1** (1), 1982, pp. i-v.

[Cos94] da Costa, N. C. A., *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, S. Paulo, Hucitec, 2a. ed., 1994.

[Cos97] da Costa, N. C. A., *O Conhecimento Científico*, Discurso Editorial, 1997.

[CosBez94] da Costa, N. C. A. et Béziau, J. -Y., 'Théorie de la valuation', *Logique et Analyse* **146**, 1994, pp. 95-117.

[CosKra04] da Costa, N. C. A. and Krause, D., 'The logic of complementarity', a aparecer (veja `http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00001559`).

[Dal83] Dalla Chiara, M. L., 'Physical implications in a Kripkian semantical approach to physical theories', in M. L. Dalla Chiara et al. (eds.), *Logic in the 20th century*, Roma, Scientia, 1983, pp. 37-51.

[DavHer85] Davis, P. J. e Hersh, R., *A Experiência Matemática*, Francisco Alves, 1985.

[Dev93] Devlin, K., *The joy of sets: fundamentals of contemporary set theory*, Springer, 1993.

[Dev97] Devlin, K., *Goodby Descartes: the end of logic and the search for a new cosmology of the mind*, John Wiley & Sons, 1997.

[End72] Enderton, H. B., *A mathematical introduction to logic*, New York and London, Academic Press, 1972.

[End77] Enderton, H. B., *Elements os set theory*, New York, Academic Press, 1977.

[Eve90] Eves, H., *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, 3rd. ed., Dover Pu., 1990.

[Fer01] Ferreirós, J., 'The road to modern logic -an interpretation', *Bulletin of Symbolic Logic* **7** (4), Dec. 2001, pp. 441-484.

[Fra82] Franco de Oliveira, A. J., *Teoria de conjuntos: intuitiva e axiomática*, Lisboa, Livraria Escolar Editora, 1982.

[Haa74] Haack, S., *Deviant Logic*, Cambridge Un. Press, 1974.

[Hal62] Halmos, P. R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pu. Co., 1962.

[Hal74] Halmos, P. R., *Naive set theory*, Springer, 1974. Há tradução para o Português com o título *Teoria Ingênua de Conjuntos*.

[Hal78] Halmos, P. R., *Espaços vetoriais de dimensão finita*, Rio, Campus, 1978.

[Hod95] Hodel, R. E., *An introduction to mathematical logic*, PWS Pu. Co., 1995.

[Hof80] Hofstadter, D. R., *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Penguim Books, 1980.

[Jam74] Jammer, M., *Philosophy of Quantum Mechanics*, New York, John Wiley, 1974.

[Jau68] Jauch, T., *Foundations of quantum mechanics*. New York, Addison-Wesley, 1968.

[Kal98] Kalamara, Fotini M., 'The internal description of a causal set: what the universe looks like from the inside', `http://xxx.lanl.gov/list/gr-qc/9811053`

[KneKne80] Kneale, W. e Kneale, M., *O desenvolvimento da lógica*, Lisboa, Fund. Calouste Gulbenkian, 2a. ed., 1980.

[Kne63] Kneebone, G. T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Van Nostrand, 1963.

[Kra02] Krause, D., *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*, S. Paulo, EPU, 2002.

[Kri71] Krivine, J.-L., *Introduction to set theory*, Dordrecht, D. Reidel, 1971.

[Kuh78] Kuhn, T. M., *A Estrutura das Revoluções Científicas*, Perspectiva, 2a. ed., 1978 (Col. Debates, 115).

[Lad69] Ladrière, J., *Limitaciones Internas de los Formalismos*, Madrid, Tecnos, 1969.

[Lem71] emmon, E. J., *Beginning Logic*, Thomas Nelson & Sons,1971.

[Lip64] Lipschutz, S. *Theory and problems of set theory and related topics*, New York, Schaum Pu., 1964. Há tradução para o Português.

[Mos94] Moschovakis, Y. N., *Notes on set theory*, Springer, 1994.

[Man88] Mangani, P., *Appunti di logica matematica*, Firenze, C.D.O, 1988.

[Men87] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, Monterey, Wadsworth & Brooks/Cole, 3rd. ed., 1987.

[Man88] Mangani, P., *Appunti di logica matematica*, Firenze, C.D.O, 1988.

[Man77] Manin, Yu. I., *A Course in Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1977.

[Mat65] Mates, B., *Elementary Logic*, Oxford Un. Press, 1965.

[Men77] Mendelson, E., *Álgebra booleana e circuitos de chaveamento*, McGraw Hill, 1977 (Col. Schaum).

[Men87] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, Chapman & Hall, 4th. ed., 1997.

[Mir87] Miraglia, F., *Cálculo Proposicional: uma integração da álgebra e da lógica*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Coleção CLE no. 1, 1987.

[Mor01] Mortari. C. A., *Introdução à Lógica*, UNESP, 2001.

[Pes99] Pessoa Jr., O., 'A naturalistic review of a tratise on the logic of scientific knowledge', *Manuscrito* XXII (1), 1999, pp. 197-239.

[Pog94] Pogorzelski, W. A., *Notions and theorems of elementary formal logic*, Warsaw Un., Białystok, 1994.

[Pra93] Prawitz, D., 'Remarks on Hilbert's Program for the foundations of mathematics', in G. Corsi *et al.* (eds.), *Bridging the gap: philosophy, mathematics, and physics*, Dordrecht, Kluwer Ac. Pu, 1993, pp. 87-98.

[Rog71] Rogers, R., *Mathematical Logic and Formalized Theories*, North-Holland, 1971.

[Ros95] Ross, D., *Aristotle*, Routledge, 1995.

[Rus48] Russell, B., *Los Principios de la Matemática*, Espasa Calpe, 1948.

[Sch01] Scheibe, E., 'The mathematical overdetermination of physics', in Scheibe, E., *Between Rationalism and Empiricism*, Springer-Verlag, 2001, pp. 571-583.

[Sho67] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison Wesley, 1967 (reimpresso pela Association for Symbolic Logic, 2000).

[Sup59] Suppes, P., *Introduction to Logic*, Van Nostrand, 1959.

[Tar66] Taski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Oxford Un. Press, 2nd. printing, 1966.

[Tar83] Tarski, A., 'Investigations into the sentential calculus', in Tarski, A., *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Pu. Co., 2nd. ed. 1983, pp. 38-59.

[Tar83a] Tarski, A., 'On some fundamental concepts of metamathematics', in Tarski, A., *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Pu. Co., 2nd. ed. 1983, pp. 30-37.

[Tru77] Truesdell, C., *A first course in rational continuum mechanics*, Vol. I: General Concepts. New York, San Francisco and London, Academic Press, 1977.

[Tym86] Tymoczko, T. (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, 1986.

[Wil65] Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, John Wiley & Sons, 2nd. ed., 1965.

[Wol03] Wolenski, J., 'Lvov-Warsaw School', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/lvov-warsaw/>.