

Pré-Publicações do Departamento de Filosofia  
Universidade Federal de Santa Catarina  
CP 476, 88040-900 Florianópolis, SC Brasil

**Observações  
Sobre a Neutralidade Ontológica  
da Matemática**

*Geraldo Gelowate,  
Décio Krause e Antonio M. N. Coelho*  
ANO VIII NÚMERO 59, JUNHO 2003

## Observações Sobre a Neutralidade Ontológica da Matemática

Geraldo Gelowate,  
Décio Krause e Antonio M. N. Coelho

### Resumo

Mario Bunge sugeriu que a matemática clássica é ontologicamente neutra. Neste artigo, sem adentrar em uma discussão detalhada sobre este tema, partimos da frase de Bunge, que é tomada como motivação, para mostrar que a matemática e a lógica clássicas estão comprometidas com o conceito de *indivíduo* em alguma acepção. Assim, a suposta neutralidade pode ser defensável unicamente se pressupusermos um discurso acerca de indivíduos de algum tipo. A possível consideração das entidades quânticas como *não-indivíduos* (aos quais o conceito usual de identidade da matemática tradicional não se aplica) é usada para demonstrar que a tese de Bunge envolve ainda outras considerações e que não vale em geral.

### Palavras-Chave

Matemática clássica, compromisso ontológico, indivíduos, ZFC, distinguibilidade em uma estrutura.

### Abstract

Mario Bunge has suggested that classical mathematics is ontologically neutral. In this paper, we take Bunge's thesis as a motivation for an analysis of the ontological commitment of classical logic and mathematics. Our conclusion is that both classical logic and mathematics are committed to *individuals*. So, their supposed neutrality can be sustained only if we assume a discourse concerning individuals of some kind. The possible interpretation of quantum entities as non-individuals (to which the usual concept of identity of traditional mathematics cannot be applied) is invoked to sustain that Bunge's thesis still involves further considerations and cannot be sustained in general.

### Keywords

Classical mathematics, ontological commitment, individuals, ZFC, distinguishability in a structure.

O ADVENTO DA FÍSICA quântica acarretou situações inusitadas, e por vezes controversas, a diversas áreas do conhecimento. Uma dessas situações, por exemplo, diz respeito ao fato dos objetos quânticos exibirem estatísticas distintas da usual, conhecida como 'estatística de Maxwell-Boltzmann', à qual obedeceriam as partículas 'clássicas'. Diversos pontos de vista tentam dar conta dessa peculiaridade. Um deles defende que as entidades quânticas são, em algum sentido, *não-indivíduos*, e uma das formas de entender essa não-individualidade é a de que o conceito de identidade não seria aplicável a tais entidades, como sustentaram E. Schrödinger (1952; 1998) e Weyl (1949), por exemplo. Outro ponto de vista defende que as partículas quânticas podem ser consideradas como indivíduos apresentando, no entanto, propriedades muito diferentes dos apresentados pelas partículas clássicas (French and Redhead 1988). A polêmica resulta numa situação bastante curiosa onde, segundo defendem alguns, nossa metafísica fundamental é indeterminada pela física (para maiores detalhes, ver French 1999; French and Krause, em preparação).

Outra situação inusitada acarretada pelo advento da física quântica diz respeito à matemática. Ainda que hajam abordagens categoriais ou fundamentadas numa lógica de ordem superior (dentro os tratamentos mais comuns), a matemática usual tem geralmente suas estruturas fundamentais elaboradas numa teoria de conjuntos.

Desse modo, a matemática não pode deixar de apresentar certos tipos de compromissos para com essa teoria conjuntista, a qual se funda e, ao que tudo indica, acaba por comprometer-se com, uma noção de *indivíduo* – como procuraremos mostrar no que segue. Além do mais, ao ser assim considerada, a matemática parece não prover um formalismo adequado para tratar das entidades quânticas, pelo menos no tocante à interpretação acima mencionada de não-indivíduos. Em particular, essa interpretação poderia suscitar dúvidas quanto à capacidade da matemática usual de expressar o conceito de não-indivíduo. Interessante citar que esta inadequação parece decorrer em parte do modo pelo qual é feita a caracterização de *identidade* na teoria de conjuntos, tendo papel de destaque o axioma da extensionalidade. Ao se comprometer com uma noção de *indivíduo*, a matemática clássica parece inapropriada para tratar adequadamente vários aspectos filosóficos relacionados às entidades descritas pela física quântica, com especial destaque a visão dos quanta como não-indivíduos. Como argumentaremos, um tal tratamento só é possível mediante a introdução de postulados adicionais, como se faz usualmente em física (postulados de simetria).

Conquanto esse comprometimento da matemática com a noção de indivíduo possa parecer razoável a alguns, nem de longe trata-se de um ponto consensual. Mário Bunge defende explicitamente o contrário. Sua afirmação, aqui tomada

de empréstimo, é bastante ilustrativa a esse respeito:

Deductive logic and pure mathematics, in particular abstract mathematical theories, are ontologically neutral. Precisely for this reason they can be used in building ontological theories. There is no a priori limitation on the variety of mathematical theories that can be employed in metaphysical research. The choice will depend largely upon the metaphysician's background and preferences. (Bunge 1977, p.15)

Defendendo o que denomina *Ficcionismo Moderado*, Bunge afirma que as ciências formais – e entre elas a matemática – não têm nenhum compromisso ontológico, não assumem a existência de qualquer entidade concreta: não são sobre coisas concretas mas sobre construtos (como por exemplo, predicados, proposições e teorias). Os objetos matemáticos, segundo ele, são *ficta* e, na matemática, como nas artes, as verdades são internas (contextuais). Dentro de sua concepção, a neutralidade ontológica da matemática explica porque ela é a linguagem universal da ciência, da tecnologia e até da filosofia (Bunge 1977; 1980; 1997).

Não pretendemos fazer uma análise exegética detalhada a respeito desse aspecto da obra de Bunge. Citamo-lo como motivação de nosso argumento que, contrariamente, admite como válida a afirmação da neutralidade ontológica da matemática somente nos casos em que estivermos pressupondo um discurso acerca de indivíduos de algum tipo.

Pretendemos inicialmente explicitar pelo quê estamos tomando a matemática clássica e, em especial, descrever alguns pressupostos que a embasam. Como um de tais pressupostos é o conceito de identidade, iremos discorrer algo a respeito das imbricações entre identidade e ontologia destacando a postura metafísica que aceita *não-indivíduos* (no nosso modo de caracterizá-las, entidades às quais o conceito de identidade não se aplica –cf. French e Krause, a aparecer). Nosso argumento seguirá descrevendo o modo como a matemática clássica permite tratar de objetos indiscerníveis – franca alusão às entidades descritas pela física quântica. À medida que esse tratamento de objetos indiscerníveis usualmente é feito dentro de uma certa estrutura (no sentido descrito abaixo), exploraremos de um ponto de vista filosófico o seguinte fato: em ZFC (que de certo modo 'resume' a matemática clássica) toda estrutura pode ser trivialmente imersa em uma estrutura rígida. Ainda que matematicamente esse teorema seja muito simples, filosoficamente ele é bastante rico. Por fim, como dito acima, esperamos poder argumentar satisfatoriamente que a tese de que a matemática clássica é

ontologicamente neutra pode ser defensável unicamente a partir da pressuposição de um discurso acerca de indivíduos.

## 1 Alguns Pressupostos da Matemática Clássica

Existem diversas maneiras de fundamentar o que usualmente denominamos de ‘matemática clássica’. Optamos por aquela que utiliza uma teoria de conjuntos, uma vez que essa é a maneira mais difundida. Não que queiramos conceder algum privilégio epistêmico ou ontológico a essa abordagem em detrimento das demais, como a teoria de categorias, as lógicas de ordem superior ou mesmo alguns tipos de mereologias (ainda que essas abordagens não seja entre si equivalentes). Gostaríamos de enfatizar o seguinte: nossa opção por uma teoria de conjuntos para construir praticamente toda a matemática padrão é puramente metodológica – já que precisamos optar, optamos pela mais comum, e mais utilizada até mesmo no discurso filosófico.

Originada com Georg Cantor (1845-1918), a teoria de conjuntos deve sua primeira versão axiomática a E. Zermelo (1871-1956). Posteriormente somaram-se as contribuições de A. Fraenkel (1891-1965) e T. Skolem (1887-1963), dentre vários outros, resultando no que se conhece hoje como teoria de Zermelo-Fraenkel (assumiremos a versão que postula o axioma da escolha, ZFC). Outros sistemas axiomáticos também apareceram como, por exemplo, o de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG); o de Kelley-Morse (KM), e o de Quine-Rosser (NF), dentre vários outros (ver Krause 2002).

Relevante é mencionar que, embora tais sistemas não sejam equivalentes, eles parecem preservar um aspecto importante da caracterização de conjunto presente na formulação intuitiva cantoriana. De acordo com Cantor: “Por um conjunto entendemos qualquer coleção, reunida numa totalidade, de objetos definidos e distintos de nossa intuição ou pensamento”(1955, p.85). Formalmente, esses ‘objetos definidos e distintos’ podem ser tratados como tais nos sistemas axiomáticos na medida em que esses últimos apresentem uma teoria da identidade, e que valha alguma forma de ‘axioma da extensionalidade’. Em outras palavras, os conjuntos e seus elementos, que em ZFC são igualmente conjuntos (não há átomos envolvidos), são sempre passíveis de ou serem comparados como iguais ou de não serem (vale a lei do terceiro excluído) e desse modo podem, de alguma maneira, ser tomados como *objetos definidos e distintos*: em ZFC – que será a teoria de conjuntos que iremos adotar – sempre é possível dizer que dois objetos são ou não são o mesmo objeto. Uma dessas proposições será verdadeira.

Como mencionamos, optamos por ZFC. Uma questão que poderia ser colocada é a do que significa dizer que a matemática pode ser fundamentada a partir

de uma teoria de conjuntos como Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha. Isto é, de que maneira podemos entender a afirmação de que, através de uma teoria de conjuntos como ZFC, é possível *erigir* toda a matemática padrão?

A resposta a essa questão encontra-se intimamente relacionada ao enorme ‘poder redutor’ exibido pelas teorias de conjuntos e por ZFC em particular, como é sabido. Depois da formulação inicial, realizada por Cantor, percebeu-se que os diversos conceitos da análise e da aritmética poderiam ser reduzidos ao de conjunto e de suas propriedades operatórias. Conseqüentemente, no que se refere aos fundamentos, as teorias de conjuntos passaram a ocupar um papel central em matemática. Como se isso não bastasse, um grande empreendimento realizado no século passado por Nicolas Bourbaki<sup>1</sup> permitiu que a matemática pudesse ser vista, dito por alto, como a teoria das ‘espécies de estruturas’ sendo, também essas, construídas a partir dos conceitos de uma teoria de conjuntos.<sup>2</sup> Sobre isso, a afirmação de da Costa é ilustrativa:

Ao investigarmos, em detalhe, as várias geometrias e espaços, as diversas álgebras e outros sistemas da matemática, verifica-se que eles determinam construtos abstratos de natureza conjuntista [...] definíveis no interior de alguma teoria de conjuntos, em geral a teoria de Zermelo-Fraenkel, como é o caso, *v.g.*, de Bourbaki. (da Costa 1999, p.79)

Podemos perceber, ainda que aqui somente como notícia, que a teoria de conjuntos se firmou como capacitada a fundamentar praticamente toda a matemática clássica. Mesmo não se constituindo como o modo único e definitivo, é o mais comumente utilizado quando matemáticos e filósofos tentam responder à questão de em que se sustenta a matemática clássica. Dizer que a matemática clássica pode fundamentar-se numa teoria de conjuntos (ZFC, para os nossos propósitos) significa dizer que pode-se erigir a matemática clássica utilizando construtos conjuntistas, *i.e.*, que podemos traduzir todos os conceitos da primeira em conceitos correspondentes da segunda, num sentido que é exemplificado por meio da seguinte passagem:

---

<sup>1</sup>Nicolas Bourbaki é o pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos que, a partir de meados da década de 1930, pretendeu explicitar os elementos fundamentais da matemática. Dentre esses elementos podemos citar, por exemplo, a concepção de método, de rigor, da própria matemática e de temas com ela relacionados. O resultado desse empreendimento é um tratado intitulado *Éléments de Mathématique* (Corry 1992; Halmos, 1957; Cartier, 1998).

<sup>2</sup>Curiosamente, outro modo de fundamentar a matemática surge dentro do próprio Bourbaki: a teoria das categorias. A esse respeito ver (MacLane 1971; 1996).

A typical example of the method we will adopt is the ‘identification’ of the (directed) geometric line  $\Pi$  with the set  $\mathcal{R}$  of real numbers, via the correspondence which ‘identifies’ each point  $P \in \mathcal{R}$  with its coordinate  $x(P)$  with respect to a fixed choice of an origin  $O$ . What is the precise meaning of this ‘identification’? *Certainly not that points are real numbers.*

[...] What we mean by the ‘identification’ of  $\Pi$  with  $\mathcal{R}$  is that the correspondence  $P \mapsto x(P)$  gives a *faithful representation* of  $\Pi$  in  $\mathcal{R}$  which allows us to give arithmetic definitions for all the useful geometric notions and to study the mathematical properties of  $\Pi$  *as if points were real numbers.*

[...] we will discover within the universe of sets *faithful representations* of all the mathematical objects we need, and we will study set theory on the basis of the lean axiomatic system of Zermelo *as if all mathematical objects were sets.* (Moschovakis 1994, p.33-34)

Uma vez explícito que estamos tomando matemática como aquela fundamentada em ZFC, podemos dedicar nossa atenção a dois aspectos presentes em uma tal teoria: o conceito de identidade e o axioma da extensionalidade. Adiante-se que suporemos que o que é válido afirmar para uma axiomática como ZFC, válido também será para a matemática que nela se constrói. É importante destacarmos esse ponto porque, grosso modo, iremos argumentar que o conceito de identidade e o axioma da extensionalidade presentes em ZFC estão, de algum modo, incorporados à matemática clássica e que, as limitações que eles impõem à teoria de conjuntos impõem também à matemática e à física ou a qualquer disciplina que nela se funda. Tratemos, então, de descrever esses dois aspectos.

O conceito de identidade em teoria de conjuntos pode ser tratado de várias maneiras, como por exemplo: (i) adotando-se um predicado de identidade como primitivo em uma linguagem de 1ª ordem, (ii) como conceito definido de uma linguagem de 1ª ordem, o que é possível no caso em tela uma vez que a linguagem da teoria de conjuntos ZFC tem apenas um número finito de predicados primitivos, (iii) como conceito definido em uma linguagem de 2ª ordem. No caso (i) o conceito de identidade é regido por axiomas específicos, usualmente os de uma relação de equivalência e a substitutividade (ver Mendelson 1997). No caso (ii), podemos (em ZFC)  $x = y$  como definida pela fórmula  $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \wedge \forall w(x \in w \leftrightarrow y \in w)$  (ver Fraenkel, Bar-Hiller e Levy 1973). Por outro lado, como conceito definido de uma linguagem de 2ª ordem – caso (iii), o conceito de identidade aparece comumente na literatura expressando o que se conhece como Lei de Leibniz que, por sua vez, incorpora o Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII). A Lei de Leibniz pode ser escrita como:

$$\forall F(Fa \leftrightarrow Fb) \leftrightarrow a = b \quad (1)$$

onde  $a$  e  $b$  denotam elementos do domínio e  $F$  é uma variável percorrendo as propriedades de tais elementos. O PII corresponde à fórmula (1) tomando ‘ $\rightarrow$ ’ no lugar do segundo ‘ $\leftrightarrow$ ’. Habitualmente, procedemos segundo o modo (i) em ZFC.

O axioma da extensionalidade é um dos axiomas específicos de ZFC. Intuitivamente, afirma que quaisquer que sejam dois conjuntos  $x$  e  $y$ , se  $x$  e  $y$  têm exatamente os mesmos elementos, então  $x$  e  $y$  são o mesmo conjunto. Formalmente tal axioma se expressa por:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y) \quad (2)$$

É relevante destacar neste ponto que, a partir do conceito de identidade e do axioma da extensionalidade, podemos caracterizar os conjuntos obtidos em ZFC como providos de uma ‘*identificação*’, submetidos a uma teoria de identidade. Essa caracterização é bastante significativa pois é a partir dela que podemos comparar dois conjuntos quaisquer entre si e conseqüentemente afirmar que eles são ou idênticos ou diferentes.

Assim colocada, tal teoria da identidade pode receber a denominação de ‘leibniziana’ pois, obviamente, conjuntos que pertencem aos mesmos conjuntos são iguais e portanto, em contextos extensionais, onde ter uma certa propriedade equivale a pertencer a um determinado conjunto, o PII se verifica e, por força dos axiomas da lógica de 1<sup>a</sup> ordem, a sua recíproca logo, vale a Lei de Leibniz. Essa teoria da identidade perpassa todas as versões axiomáticas da teoria de conjuntos, em particular aquela que estamos adotando e em que usualmente se constrói a matemática clássica, *i.e.*, ZFC.

Gostaríamos, no entanto, de chamar a atenção para alguns resultados advindos de certas interpretações relacionadas à física quântica, que poderiam fazer com que a base matemática da física, assentada em ZFC, tivesse que ser revista para acomodá-las. A ‘revisão’ da base conjuntista da matemática, que faz com que essas interpretações não sejam portanto descartadas em princípio, são baseada em argumentos advindos da própria mecânica quântica, e foi proposta por vários autores como Manin (1976) e Dalla Chiara e Toraldo di Francia (1993), dentre outros. No nosso caso, no entanto, ficaremos restritos ao conceito de *não-indivíduos*, *i.e.*, que entenderemos como entidades destituídas de individualidade, que se distinguiriam das entidades macroscópicas por, entre outras coisas, não obedecerem a teoria da identidade clássica, em particular a Lei de Leibniz. Em outras palavras, a física quântica apresenta entidades que compartilham as mesmas propriedades mas não podem ser consideradas como a mesma

entidade. O que destacamos aqui é que o formalismo matemático construído em ZFC – com a respectiva teoria de identidade – talvez não seja, de uma certa perspectiva, adequado para tratar de entidades que diferem radicalmente daquilo que a mecânica quântica pressupõe (Schrödinger 1952, 1957; Post, 1963; Born, 1943; French, 1989a).

## 2 Matemática e Ontologia

Retornando ao afirmado por Bunge, poderíamos dizer que a matemática clássica pode ser ontologicamente neutra para tratar de quaisquer entidades que se comportem como indivíduos (*leia-se*: entidades conformes à caracterização da identidade em ZFC). No entanto, no que tange àquelas que exibem comportamento radicalmente diverso, tal afirmação parece problemática. A questão que precisamos responder é a de como podemos comprometer uma teoria com uma ontologia? Em que sentido é possível afirmar que matemática e algum tipo de ontologia estão vinculadas?

Uma das respostas nos é dada por W. V. Quine (1908-2000) por meio do denominado *critério de compromisso ontológico*, que pode ser assim expresso: uma entidade é suposta por uma teoria se, e somente se, pode ser incluída entre os valores de suas variáveis a fim de que os enunciados afirmados pela teoria sejam verdadeiros (Quine 1953). Ou seja, o critério afirma que uma teoria compromete-se com aquelas, e somente aquelas, entidades a que as variáveis ligadas (de sentenças de sua linguagem) devem ser capazes de se referir, de modo que as afirmações feitas sejam verdadeiras.

Podemos afirmar então que, seguindo Quine, do ponto de vista de uma linguagem dada, a questão a respeito do que *existe* é a questão a respeito do *domínio* de valores de suas variáveis. Nas palavras do próprio Quine, “Ser é ser o valor de uma variável.”(1990, p.35) ou ainda, “Ser suposto como uma entidade é, pura e simplesmente, ser contado como o valor de uma variável.”(Ibid., p.32).

No caso particular da pergunta sobre “o que é suposto como entidade por uma teoria de conjuntos como ZFC”, a resposta remeteria àquelas entidades cuja existência é afirmada pelas variáveis ligadas de ZFC. Tais entidades são conjuntos de ZFC, para os quais valem as propriedades lógicas da igualdade, *i.e.*, reflexividade, simetria, transitividade e substitutividade, e também a propriedade conjuntista da igualdade, *i.e.*, a extensionalidade.<sup>3</sup> Assim, em ZFC,

<sup>3</sup>Lembremos que são teoremas de ZFC:  $\forall x(x = x)$  (reflexividade),  $\forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x)$  (simetria),  $\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$  (transitividade),  $\forall x\forall y(\forall z(x \in z \leftrightarrow y \in z) \leftrightarrow x = y)$  (substitutividade em relação à pertinência) e  $\forall x\forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$  (extensionalidade).

quaisquer duas entidades (conjuntos) podem sempre serem ditas iguais ou diferentes – embora nem sempre saibamos qual é o caso – e a identidade pode ser vista como leibniziana no sentido mencionado: se duas entidades possuem os mesmos atributos, isto é, se pertencem aos mesmos conjuntos, então elas são iguais. Além disso, se considerarmos a possibilidade de afirmar, de quaisquer duas entidades em ZFC, que elas são iguais ou distintas como sendo o critério que as individualiza, podemos afirmar que ZFC afirma a existência de indivíduos. Enfatizemos: ao adotar a teoria da identidade usual, ZFC se compromete com indivíduos.

Desse modo, é-nos possível compreender a tese de Quine de que ‘não há entidade sem identidade’ expressa, dentre outras passagens, quando diz: “Mas que sentido é que pode ser dado a falar-se de entidades das quais não se pode dizer com sentido que são idênticas a si mesmas e distintas umas das outras?” (Ibid., p.24). Parece claro que as entidades a que Quine se refere são aquelas que percorrem conjuntos *à la* Cantor, gozando “[...] de um conceito cristalino de identidade.” (Quine, 1989, p.62). Como deixamos antever acima, nesse caso, *ser é ser indivíduo*.

### 3 Ontologia e Estrutura

Outro modo de reforçar a idéia do comprometimento de ZFC com uma ontologia de indivíduos utiliza a noção de estrutura. Falaremos algo sobre este tópico pois isso nos permitirá considerar *ur-elementos*, entidades que não são conjuntos, e que aparentemente importam para as ciências empíricas. Cabe lembrar que tudo o que se disse acima acerca de ZFC se aplica, com devidas adaptações fáceis, a ZFU, ou seja, Zermelo-Fraenkel com *ur-elementos*.

Uma estrutura matemática é, grosseiramente falando, um construto abstrato de natureza conjuntista (da Costa 1999). Em geral, apresentamos uma estrutura  $\mathcal{A}$  da seguinte maneira:

$$\mathcal{A} = \langle D, \{R_i\}_{i \in I}, \{f_j\}_{j \in J}, \{a_k\}_{k \in K} \rangle \quad (3)$$

onde  $D$  é o domínio da estrutura (usualmente um conjunto não vazio);  $R_{i_s}$  e  $f_{j_s}$  são, respectivamente, relações e funções em  $D$ ; e  $a_k$  são elementos de  $D$ . Por exemplo,  $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ ;  $\mathcal{C} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ , ainda que estas não estejam exatamente na notação indicada em (3).

Por ser um construto de natureza conjuntista, o domínio de uma estrutura pode ter como elementos somente entidades para as quais faça sentido o conceito de identidade acima delineado, e que estejam submetidas ao axioma da extensionalidade (conforme descrito na seção precedente). Em outras palavras,

qualquer que seja o domínio  $D$  de uma estrutura e quaisquer que sejam os elementos  $a$  e  $b$  desse domínio,  $a$  e  $b$  são *indivíduos* – numa certa acepção<sup>4</sup> – submetidos ao PII.

Dizer que dois diferentes elementos do domínio de uma estrutura obedecem à versão conjuntista do PII significa dizer que são distinguíveis, isto é, que não pertencem a todos os mesmos conjuntos. Podemos, entretanto, introduzir outra noção de distinguibilidade. Trata-se da distinguibilidade relativa a uma estrutura, na qual desempenha um papel central a noção de *invariância sob automorfismos*.<sup>5</sup> Vejamos isso em algum detalhe:

**Definição 3.1** *Seja  $\mathcal{A}$  uma estrutura,  $a$  e  $b$  elementos do domínio  $D$  dessa estrutura. Diz-se que  $a$  e  $b$  são  $\mathcal{A}$ -distinguíveis (ou distinguíveis em  $\mathcal{A}$ ) se, e somente se, existe um subconjunto  $X \subseteq D$  tal que:*

- (i)  $X$  é invariante sob automorfismos de  $\mathcal{A}$ , ou seja,  $f(X) = X$  para todo automorfismo  $f$  de  $\mathcal{A}$
- (ii)  $a \in X$  se, e somente se,  $b \notin X$

*caso contrário, dizemos que  $a$  e  $b$  são  $\mathcal{A}$ -indistinguíveis (ou indistinguíveis em  $\mathcal{A}$ ) (Krause; Coelho 2001).*

Em contextos extensionais, como ZFC, onde uma propriedade pode ser identificada com uma coleção de objetos e, utilizando a definição dada, podemos afirmar que dois elementos são  $\mathcal{A}$ -indistinguíveis quando eles pertencem às mesmas coleções de elementos do domínio que são invariantes sob automorfismos. Em outras palavras:  $a$  e  $b$  são  $\mathcal{A}$ -indistinguíveis se, e somente se, existe um automorfismo  $f$  de  $\mathcal{A}$  tal que  $f(a) = b$ .<sup>6</sup> Por outro lado,  $a$  e  $b$  são  $\mathcal{A}$ -distinguíveis se, e somente se, não existe um automorfismo  $f$  de  $\mathcal{A}$  tal que  $f(a) = b$ , existindo então necessariamente um  $X \subseteq D$ <sup>7</sup> que é invariante sob automorfismos de  $\mathcal{A}$  tal que  $a \in X$  mas  $b \notin X$ .

<sup>4</sup>Tomamos ‘indivíduo’ na acepção apresentada por Krause (1996).

<sup>5</sup>Uma das motivações dessa abordagem deve-se a ZFU (Zermelo-Fraenkel com *Ur-elementos*) que, dito de modo breve, admite entidades que não são conjuntos mas podem ser elementos de conjuntos. Nesse caso, dizer que não existem características que distinguem um indivíduo do outro significa dizer, em termos matemáticos, que qualquer permutação de ur-elementos induz um automorfismo do universo.

<sup>6</sup>Nesse caso,  $a \in X$  se, e somente se,  $b \in X$  uma vez que  $f(a) = b$  e  $f^{-1}(b) = a$ , com  $X \subseteq D$  sendo invariante sob automorfismos de  $\mathcal{A}$  e  $f$  sendo um automorfismo de  $\mathcal{A}$ .

<sup>7</sup>Basta considerar  $X = \{g(a) : g \text{ é um automorfismo de } \mathcal{A}\}$ .

A idéia intuitiva é que elementos  $\mathcal{A}$ -indistinguíveis são os que pertencem às mesmas subcoleções do domínio de  $\mathcal{A}$ , caracterizadas por  $\mathcal{A}$ , isto é, subcoleções invariantes por automorfismos de  $\mathcal{A}$ . Dito de outra maneira, a indistinguibilidade em  $\mathcal{A}$  não requer o compartilhamento de todas as propriedades mas apenas daquelas que são invariantes sob automorfismos de  $\mathcal{A}$ , ou seja, fica restrita à estrutura considerada. Consideremos o seguinte exemplo: seja  $\mathcal{A}=\langle\mathbb{Z}, +\rangle$ . A função  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{Z}$ , é um automorfismo de  $\mathcal{A}$ . Assim, qualquer que seja  $x \in \mathbb{Z}$ , temos que  $x$  e  $-x$  são  $\mathcal{A}$ -indistinguíveis. De fato, como o único automorfismo de  $\mathcal{A}=\langle\mathbb{Z}, +\rangle$  além de tal  $f$  é a função identidade, temos que  $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ , se  $a$  e  $b$  são  $\mathcal{A}$ -indistinguíveis então  $b = -a$ .

Uma estrutura é dita *rígida* se, e somente se, seu único automorfismo é a função identidade. As estruturas rígidas são exatamente aquelas nas quais indistinguibilidade relativa a uma estrutura e a identidade coincidem. Tal fato pode ser assim demonstrado: suponha que  $f$  é um automorfismo de  $\mathcal{A}$  que não é a função identidade. Então existe um  $a$  no domínio tal que  $f(a) = b \neq a$ . Mas, sendo  $b \neq a$  e, por hipótese, em tal estrutura identidade e  $\mathcal{A}$ -indistinguibilidade coincidindo, então existe um subconjunto  $X$  do domínio tal que: (i)  $X$  é invariante sob automorfismos e (ii)  $a \in X$  mas  $b \notin X$ . Mas isso é uma contradição, pois sendo  $X$  invariante sob automorfismos e  $a \in X$ , deveríamos ter  $f(a) = b \in X$ .<sup>8</sup> Ora, sendo  $V$  o universo de ZFC, a estrutura  $\mathcal{A}=\langle V, \in \rangle$  é rígida. Prova-se isso utilizando-se o teorema do isomorfismo, mas não faremos isso aqui (Jech 1997, p.74). Assim, a indistinguibilidade relativizada a um universo de ZFC coincide com a identidade usual: isso reforça o nosso ponto: a identidade que vale para indivíduos.

Lembremos ainda que em ZFC toda estrutura  $\mathcal{A}$ , rígida ou não, pode ser imersa numa estrutura rígida constituída acrescentando-se às relações de  $\mathcal{A}$  todos os subconjuntos unitários de elementos do domínio de  $\mathcal{A}$ . Por exemplo,  $\mathcal{A}=\langle\mathbb{Z}, +\rangle$  pode ser imersa em  $\mathcal{A}'=\langle\mathbb{Z}, +, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \{2\}, \{-2\}, \dots\rangle$ . Isso é claramente um indicador do comprometimento de ZFC (e da matemática em geral) com uma ontologia de indivíduos: os objetos 'indistinguíveis' podem sempre ser distinguidos quando estendemos a estrutura que estamos considerando a uma estrutura rígida.

Assim considerada, parece que ZFC apresenta uma séria limitação no que tange ao tratamento das entidades indistinguíveis, limitação esta que transferir-se-ia à matemática clássica. Conseqüentemente, pode ser um equívoco falar que a matemática é ontologicamente neutra sem maiores qualificações. Diríamos que sua neutralidade pode ser defendida somente na medida em que se pressupõe um discurso acerca de indivíduos numa certa acepção precisa (Krause 1996). Por outro lado, a possibilidade de considerar as entidades quânticas como *não-*

<sup>8</sup>Cf. Krause e Coelho 2001.

*individuos* (para os quais o conceito usual de identidade da matemática tradicional não se aplica) nos permitiria negar tal neutralidade.

## 4 Outras Considerações

Acreditamos que a filosofia, como esclarecedora de conceitos, presta um relevante auxílio às ciências empíricas e às ciências formais. Quanto mais se permitir abordar aspectos imbricados entre essas duas ciências.

Se esse for mesmo o caso, parece-nos relevante uma abordagem filosófica preocupada em discutir as limitações subjacentes ao aparato lógico-matemáticos que usualmente é utilizado por tais ciências. Até porque, ao que tudo indica, a análise científica do mundo não se restringe a esta ou aquela lógica e nem a esta ou aquela matemática. Pensemos, por exemplo, na matemática clássica com sua abordagem predominantemente ‘conjuntista’. Não há como negar que ela é um instrumental relevante e que constitui grande parte do que temos atualmente à disposição para o tratamento formal dos conhecimentos empíricos. Mas isso não lhe concede um status de infalibilidade. Ao contrário, cremos que ela apresenta sérias dificuldades para tratar de um modo coerente, por exemplo, os resultados advindos da física quântica. Isso talvez esteja a indicar que não se pode impor uma matemática e nem mesmo uma lógica (ou uma teoria) a priori para a ciência. Em outras palavras, talvez esteja a indicar que a matemática e a lógica possuem uma face empírica que não pode ser desconsiderada. Contudo, deixamos para realizar esta discussão num outro momento.

## REFERÊNCIAS

- Born, M. *Experiment and theory in physics*. Cambridge: Cambridge Un. Press, 1943.
- Bunge, M., 'Moderate mathematical fictionism.' In: AGAZZI, E.; DARVAS, G. *Philosophy of mathematics today*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997. p.51-71.
- \_\_\_\_\_. *Epistemologia: curso de atualização*. São Paulo: T.A. Queiroz: Ed. Univ. de São Paulo, 1980. (Biblioteca das Ciências Naturais)
- \_\_\_\_\_. *Treatise on basic philosophy*. v.3 The Furniture of the Word. Dordrecht: Reidel, 1977.
- Cantor, G. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Dover, 1955.
- Cartier, Pierre. *The continuing silence of Bourbaki*. The Mathematical Intelligencer, 1998. p.22-28.
- Dalla Chiara, M.L.; Toraldo di Francia, G. 'Individuals, kinds and names in physics.' In: Corsi, G. et al. *Brindging the gap: philosophy, mathematics, physics*. Dordrecht: Kluwer Ac. Press, 1993. p.261-283.
- Corry, L. Nicolas Bourbaki and the concept of mathematical structure. *Synthese*, 92, 1992. p.315-348.
- da Costa, Newton C.A. *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso Editorial, 1999.
- Fraenkel, A. A., Bar-Hillel, Y. and Levy, A., *Foundations of Set Theory*, North-Holland, 1973.
- French, S. 'Identity and individuality in quantum theory.' *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponível em <http://plato.stanford.edu>. Acesso em: 15 outubro 2002.
- \_\_\_\_\_. 'Identity and individuality in classical and quantum physics.' *Australasian Journal of Philosophy*, 67, 1989a. p.432-446.
- French, S.; Krause, D. *Identity and Individuality in Modern Physics*. Em preparação.
- French, S.; Redhead, M. 'Quantum physics and the identity of indiscernibles.' *British Journal for the Philosophy of Science*, 39, 1988. p.233-246.
- Halmos, Paul R. 'Nicolas Bourbaki' *Scientific American*, May, 1957.

Jech, T. *Set theory*. 2.ed. Springer, 1997.

Krause, D., *Introdução aos fundamentos axiomáticos da ciência*. São Paulo: EPU, 2002.

\_\_\_\_\_. 'Remarks on individuation, quantum objects and logic.' *Logique et Analyse*, n.155-156, 1996, p.325-333.

MacLane, S. 'Structure in mathematics'. *Philosophia Mathematica*, 3(4), 1996. p.174-183.

\_\_\_\_\_. *Categories for the working mathematician*. NY: Springer, 1971.

Manin, Yu. I., 'Problems of Present Day Mathematics, I: Foundations', in: Browder, L. E. (ed.), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics: Mathematical Developments Arising from Hilbert's Problems*, American Mathematical Society, 1976, p. 36.

Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, 4th. ed., Chapman & Hall, 1997.

Moschovakis, Y.N. *Notes on set theory*. Springer-Verlag, 1994.

Post, H. 'Individuality and Physics.' *The Listener*, 70, 1963, p.534-537.

Quine, W.V.O. 'Sobre o que há.' In: Branquinho, J.(org.). *Existência e linguagem: ensaios de metafísica analítica*. Lisboa: Presença, 1990.

\_\_\_\_\_. 'Logic and the reification of universals.' *From a logical point of view*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1953. p.107.

\_\_\_\_\_. 'Falando de Objetos.' In: RYLE, G. [et al.]. *Ensaio*. São Paulo: Nova Cultural, 1989. (Coleção Os Pensadores)

Sant'Anna, A.S. 'Elementary particles, hidden variables, and hidden predicates.' *Synthese*, 125 (1/2), 2000. p.233-245.

Schrödinger, E. 'What is an elementary particle?' In: Castellani, E. (ed.) *Interpreting bodies: classical and quantum objects in modern physics*. Princeton, Princeton Un. Press, 1998.

\_\_\_\_\_. *Science theory and man*. London: Allen and Unwin, 1957.

\_\_\_\_\_. *Science and humanism*. Cambridge: Cambridge Un. Press, 1952.

Weyl, H. *Philosophy of mathematics and natural science*. Princeton: Princeton Un. Press, 1949.