Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

O Problema de Manin

Elementos para uma Análise Lógica dos *Quanta*

Décio Krause

Tese apresentada em Concurso Público para Professor Titular de **Fundamentos da Matemática** do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná.

Curitiba

1995

As our mental eye penetrates into smaller and smaller distances and shorter and shorter times, we find nature behaving so entirely differently from what we observe in visible and palpable bodies of our surrounding that *no* model shaped after our largescasle experiences can ever be true.
Erwin Schrödinger (1952)

Agradecimentos

Aos professores Newton C. A. da Costa e Steven French, pela oportunidade de muitas conversas ao longo já de alguns anos de trabalho conjunto, as quais contribuíram de maneira fundamental para que esta tese pudesse ser escrita.

Resumo

Exibir a contraparte 'estrutural' de uma teoria científica, consiste essencialmente em se explicitar a [espécie de] estrutura matemática a ela relacionada. Em geral, tais estruturas são formuladas no escopo de uma teoria de conjuntos, como Zermelo-Fraenkel ou Kelley-Morse, mas evidências recentes no campo das ciências reais, como por exemplo certas questões envolvendo os fundamentos da mecânica quântica (que é o caso aqui considerado), parecem apontar para a necessidade de se considerar estruturas lógico-matemáticas que para serem erigidas necessitam de contextos distintos dos sistemas conjuntistas usuais, como teorias intensionais de conjuntos ou outros sistemas baseados em lógicas heterodoxas, em especial (no caso aqui investigado) em lógicas não-reflexivas, em particular nas teorias de quase-conjuntos.

Tomando-se por base algumas das principais características das partículas elementares tais como descritas pela mecânica quântica (nÆo relativística), elabora-se um conceito de *quanta*. Tais *quanta* são entendidos como entidades destituídas de qualquer forma de 'substratum', sendo caracterizados unicamente por um certo número de propriedades (leis físicas) a que devem obedecer. Nesse sentido, são entidades *nomológicas*, dadas por leis. Em particular, resulta que tais entidades violam a teoria usual da identidade da lógica e da matemática tradicionais, resultando serem 'não-indivíduos' em um sentido, apresentando tão somemte um tipo de 'identidade vaga'. Ademais, não sendo individualizáveis, tais *quanta* estão muito próximas daquelas entidades que compõem a ontologia básica das teorias quânticas de campos, as quais podem ser denominadas, pelo menos em princípio, de 'teorias de partículas não-rotuláveis'.

Uma 'lógica' de tais entidades é então arquitetada. A teoria de quase-conjuntos aqui desenvolvida pode servir de aparato matemático para se erigir aquelas estruturas que aparentemente são demandadas pela microfísica. A teoria fundamenta-se em trabalhos anteriormente realizados, mas uma série de questões novas são apontadas no contexto das teorias de quase-conjuntos e de certas lógicas intensionais.

Em essência, esta investigação caminha na direção de se prover uma resposta adequada a uma questão de relevo colocada recentemente no contexto das pesquisas atuais acerca dos fundamentos da matemática, a qual denominamos de O Problema de Manin.

Abstract

The 'structural' counterpart of a scientific theory consists, roughly speaking, in describing its underlying species of structures. In the usual cases, such structures are built in usual set theories like Zermelo-Fraenkel or Kelley-Morse, but recent developments raised by (in the case here considered) quantum mechanics, have suggested that more general structures should be considered in order to cope with, for instance, the concept of *quanta*, in particular those based on intensional set theories or on some heterodox logic like (in the case under study) non-reflexive logics and quasi-set theories.

Starting from a concept of 'classical objetc', essentially that one characterized by classical physics, a concept of *quanta* is delineated to cope with those entities which violate the traditional theory of identity of classical logic and mathematics. The *quanta* are 'non-individuals' in a sense and have only a kind of 'vague' identity. Such non individuatable entities are characterized as *nomological* objects, having no any kind of 'substractum'. This approach seems to be closely related to those ones which constitute the basic ontology of the quantum field theories, which may be considered as theories of 'unindexed-particles'.

A 'logic' of such *quanta* is articulated by means of some previous works by using the quasi-set theories, but some novelties with respect to these works are presented, as for instance the introduction of some concepts which strongly depend on the intensional counterpar of the quasi-set theory. By using such a theory, the mentioned more general structures demanded by microphysics might seem to be built.

In essence, in finding axioms for dealing with collections of indistinguishable objects, this thesis works in the direction pointed out by Yu. I. Manin as one of the most important problems to be solved by the present researches in the field of the foundations of mathematics, which we call this The Manin Problem.

Capítulo 1

Introdução

> The twentieth century return to Middle Age scholastics taught us a lot about formalisms. Probably it is time to look outside again. Meaning is what really matters.
> Yu. I. Manin

P. Jourdain, na Introdução à sua tradução da obra de Cantor [9], menciona que, para J. Fourier, a matemática só encontraria justificativa no auxílio que pudesse prestar à solução de um problema físico. Tal visão de Fourier refletiria o fato de que, até meados do século passado, matemática e física constituiam quase que um ramo único do conhecimento, tendo sido estabelecida uma distinção mais clara entre essas disciplinas somente no decorrer deste século. Esta opinião é corroborada por exemplo por Yu. I. Manin, que enfatiza que a 'separação' havida entre matemática e física se deveu, dentre outros fatores, à crescente 'introspecção' e desenvolvimento interno de cada disciplina, à elaboração de modelos próprios, usando ferramentas que se tornaram peculiares a cada uma delas, de sorte que os objetivos de maneira geral deixaram de ter um denominador comum; em essência, segundo Manin, "Physicists were disturbed by the interrelation between thought and reality, while mathematicians were disturbed by the interrelation between thought and formulas".[82, p. ix]

Essa 'olhada interna', no entanto, foi fundamental para o estabelecimento da matemática como a entendemos hoje. Segundo Bourbaki, a axiomatização das diversas disciplinas e a constatação de que há teorias não categóricas, admitindo modelos não isomorfos entre sí, como a teoria dos grupos por exemplo, foi fator preponderante para o surgimento da 'nova matemática' [7, p. 20]. Com efeito, os matemáticos em grande parte teriam passado a se ocupar preponderantemente do estudo abstrato de tais estruturas axiomáticas, sem menção direta às suas possíveis realizações (digamos) 'práticas'.

Esse caminhar da matemática fez com que ela transitasse, grosso modo, de um *corpus* de conhecimento utilizável para a busca de entendimento dos fenômenos do mundo, a uma ciência que se tornou, em resumo, o estudo geral de *espécies de estruturas*, como nos aponta a obra de Bourbaki.[1] Tais espécies de estruturas são, em essência, fórmulas elaboradas na linguagem da teoria dos conjuntos.[2] Observa-se que tal fundamentação da matemática em princípios gerais e abstratos, só foi possível como a evolução do método axiomático, o desenvolvimento da lógica, e a fundamentação axiomática da teoria dos conjuntos.[3]

Por outro lado, as maneiras alternativas de se axiomatizar a teoria intuitiva dos conjuntos de Cantor, o desenvolvimento da teoria dos tipos, bem como o posterior advento da teoria das categorias, vieram mostrar que não há modo único de se fundamentar a matemática. Ademais, percebeu-se que tais 'alicerces' constituiam teorias essencialmente distintas umas das outras e, mais ainda, muitas eram não equivalentes entre sí.

Com efeito, resultados como as provas da consistência e da independência do axioma da escolha e da hipótese generalizada do contínuo e o subsequente desenvolvimento das 'matemáticas não-cantorianas' [12, 66], vieram mostrar que há várias e não equivalentes 'matemáticas (clássicas) possíveis', todas lícitas do ponto de vista matemático, e não há nada que justifique que uma delas deva ser dita ser a que deva prevalescer sobre as demais, uma que seja a 'matemática verdadeira', e que possa relegar as outras a meras possibilidades teóricas.

Ademais das matemáticas de cunho clássico, ou seja, fundamentadas na lógica tradicional, como a matemática usual, a matemática de Solovay ou outras,[4] pode-se considerar ainda a possibilidade de matemáticas baseadas em lógicas alternativas à clássica, como as matemáticas paraconsistentes [17, 86] ou a matemática quântica [120, 121]. A situação, perante essa profusão de matemáticas possíveis, é em muito semelhante àquela estabelecida quando do surgimento das geometrias não-euclidianas. Como se sabe, muitos aceitavam tais geometrias como meras 'possibilidades matemáticas', relegando no entanto à geometria euclidiana o papel de 'geometria verdadeira'. Porém, assim como se compreendeu (sobretudo após Hilbert) que não há 'geometria verdadeira', do mesmo modo se constata que todas essas matemáticas têm, por assim dizer, o mesmo status matemático, e a escolha por uma ou outra só pode ser feita por critérios de índole pragmática.

De certo modo, a flexibilidade mencionada acima acerca do uso e da possibilidade de desenvolvimento de matemáticas alternativas à usual, corrobora ainda mais o conhecido dito de Cantor de que a essência da matemática radica em sua total e completa liberdade.

---

[1] Cabe observar que, para Bourbaki, uma espécie de estruturas é um *texto* (cf. [6, p. 262]), ou seja, seu tratamento é puramente sintático. Uma versão 'semântica' da teoria das espécies de estruturas é apresentada em [24].

[2] Falaremos mais sobre tais fórmulas, ou *predicados de Suppes*, em outras partes desta tese.

[3] Ver [21, Cap. 2] para uma descrição mais pormenorizada dos demais fatores que possibilitaram essa transição. Ver também [7, Cap. 1].

[4] Ver o artigo de T. Jech [66].

Com efeito, como sugere a frase de Manin mencionada na epígrafe desta Introdução, no decorrer deste século a mencionada 'introspecção' nos fez aprender muito acerca dos formalismos, seus alcanços e limites. No entanto, a 'realidade' e as ciências reais estão ainda, como sempre, sugerindo e motivando novos estudos acerca dos fundamentos da matemática.[5] Um dos objetivos desta tese é mostrar em que sentido a física quântica nos apresenta uma situação que parece sugerir que novas espécies de estruturas sejam consideradas, de sorte que várias intuições e constatações, digamos 'físicas', possam ser mantidas tal como sugere a mecânica quântica e a intuição de pensadores como Schrödinger, Heisenberg e outros. Neste trabalho, fazemos uma exposição de alguns dos principais pontos relacionados com essa problemática, incluindo os resultados por nós obtidos sobre o assunto.

Cabe mencionar que a abordagem axiomática às teorias das ciências reais tem se mostrado vantajosa sob vários pontos de vista, dentre outras coisas por possibilitar um tratamento por assim dizer 'unificador' das diversas disciplinas científicas [110], mais ou menos nos moldes propugnados por Bourbaki para as disciplinas matemáticas [6]. No que se segue, ficaremos restritos a consideações acerca das disciplinas da física.

Em geral, o arcabouço matemático utilizado para se estruturar as disciplinas da física é a teoria usual de conjuntos. Falando sem muito rigor, uma teoria física pode ser vista como uma tripla ordenada $\mathfrak{T} = \langle M, \Delta, \rho \rangle$, na qual M denota uma espécie de estruturas, no sentido Suppes-Bourbaki [24], Δ é o 'domínio de definição' de $\mathfrak{T}$ e ρ fornece as 'regras de interpretação' que relacionam M e Δ [27].

Nos casos usuais, como na mecânica Hamiltoniana, na teoria eletromagnética de Maxwell, na teoria da relatividade geral, entre outras, a estrutura matemática M é caracterizada por uma fórmula (o 'predicado de Suppes') da linguagem de uma teoria de conjuntos, como Zermelo-Fraenkel ou Kelley-Morse [27]. Uma teoria, vista sob esse prisma, é então caracterizada pela classe de seus modelos, ou seja, pela classe de estruturas conjuntistas que satisfazem o predicado de Suppes em questão [25, 24, 109].[6]

No entanto, várias discussões na literatura recente têm sugerido que questões envolvendo os fundamentos da física, em especial da mecânica quântica, como aquelas envolvendo os conceitos de identidade e individualidade de partículas elementares, apontam para a necessidade de se considerar arcabouços teóricos mais gerais do que os contextos conjuntistas extensionais usuais. Como disse M. L. Dalla Chiara, uma das pessoas que mais tem investigado o tema,

> Significant counterindications against the adequacy of a purely extensionalistic approach in semantics have been suggested by contemporary physics. Microphysics seems to be, from a semantical point of view, essentially a world of intensions, where individual objects and

[5]No caso específico da microfísica, pode-se consultar [32]. Ver também a frase de Manin citada no início do Capítulo 1.

[6]No Capítulo final faremos algumas observações sobre este ponto.

> sets of individual objects appear, so to speak, as unnatural notions. The concept of *extension* (*reference*) becomes more and more blurred as we go deep into the logical intrincacies of Quantum Mechanics. (...) In my opinion, some characteristic semantical features which clearly appear in the logical investigations about the microuniverse do not merely point out some fairly pathological aspects of a world that is far apart from our human world. On the contrary, they make us aware about certain oversimplifications of our usual semantical principles. [34]. (ver também [37, 30])

Essa 'questão semântica' para a microfísica motivou o desenvolvimento de teorias em certos aspectos mais gerais que as teorias de conjuntos usuais. M. L. Dalla Chiara e G. Toraldo di Francia propuseram em [37] uma teoria de *quasets* para tal fim; independentemente, vinhamos investigando a questão sob outro prisma (cf. [69]), tendo chegado a uma teoria de *quase-conjuntos* [69, 72, 76, 31], a qual guarda similaridades com a dos autores italianos. Um estudo 'comparativo' entre essas teorias é esboçado no Capítulo 3.

Em resumo, o que nos tem guiado (assim como a Dalla Chiara e Toraldo di Francia) é basicamente estruturar um aparato matemático no qual as 'estruturas da física' (ver o Capítulo 4) possam ser erigidas, assim como discutir questões matemáticas, físicas e filosóficas relacionadas com a semântica das linguagens da microfísica.[7]

Dentre os motivos pelos quais estuda-se a necessidade de se considerar quase-conjuntos ao invés de conjuntos comuns no contexto dos fundamentos da mecânica quântica, podemos mencionar o seguinte. 'Coleções' de entidades como partículas elementares, devido à sua indistinguibilidade, não podem ser tratadas como 'conjuntos' estrito senso [37], isto é, tais coleções não obedeceriam os axiomas das teorias usuais de conjuntos. As teorias de quase-conjuntos[8] têm como uma de suas características a violação do princípio da extensionalidade, e isso possibilita, em boa medida, o tratamento semântico de tais predicados que não possuem extensões bem definidas, assim como de certos termos da linguagem que não têm denotação precisa. Este ponto será enfatizado no Capítulo 3.

Com efeito, como já dissemos em [41],

> [...] physical kinds and compound systems in quantum mechanics seem to share some features that are characteristic of intensional entities. Further, the relation between intensions and extensions turns out to behave quite differently from classical semantic situations. Generally, one cannot say that a quantum intentional notion uniquely determines a corresponding extension. For instance, take the notion of *electron*, whose intension is well defined by the following physical property: mass $= 9.1 \times 10^{-28} g$, electron charge =

[7] O fato de se poder 'continuar a fazer física' (em particular a mecânica quântica) no contexto da matemática padrão é mencionado em [31].

[8] Referimo-nos a [40, 76, 31, 41].

> $4.8 \times 10^{-10} e.s.u.$, spin $= 1/2$. Does this property determine a corresponding *set*, whose elements should be all and only the physical objects that satisfy our property at a certain time interval? The answer is negative. In fact, physicists have the possibility of recognizing, by theoretical or experimental means, whether a given physical system is an electron system or not. If yes, they can also enumerate all the quantum states available within it. But they can do so in a number of different ways. For example, take the spin. One can choose the x-axis and state how many electrons have spin up and how many have spin down. However, we could instead refer to the z-axis or any other direction, obtaining *different collections* of quantum states, all having the same cardinality. This seems to suggest that microobject systems present irreducibly intensional behaviour: generally they do not determine precise extensions and are not determined thereby.

A estruturação das teorias de quase-conjuntos em suma constitui uma tentativa de se encontrar 'novos axiomas' que possam dar conta de coleções de entidades como partículas elementares, que, como se sugeriu acima, não obedeceriam os axiomas das teorias usuais de conjuntos. Esta tentativa está relacionada com a questão proposta por Yu. I. Manin, durante o congresso da American Mathematical Society de 1974, como um dos problemas centrais a serem resolvidos no âmbito das pesquisas atuais acerca dos fundamentos da matemática, a saber, especificamente a busca por axiomas que possam tratar coleções de entidades como as partículas elementares da física atual [80].[9]

Há no entanto várias questões conceituais difíceis de abordar, de sorte que não cremos que tenhamos até o momento chegado a uma teoria de quase-conjuntos satisfatória. A teoria $\mathfrak{Q}$ desenvolvida nesta tese é uma tentativa de superar dificuldades apresentadas pelas teorias anteriores, e pode ser vista como um passo adiante na formulação de uma teoria matemática de coleções de objetos indistinguíveis.

Esta tese é desenvolvida do seguinte modo. No capítulo seguinte, o primeiro, chamamos a atenção para o fato mencionado acima, o qual denominamos de O Problema de Manin. Mostramos em que sentido isso consiste num problema relevante, que dificuldades há a serem superadas, notadamente aquelas acerca do (difícil) conceito de 'objeto físico' e da noção (lógica) de indistinguibilidade dos 'objetos quânticos'. Motivado em posições de especialistas como E. Schrödinger e W. Heisenberg, além das sutis análises acerca do tópico como as proporcionadas por M. Redhead e P. Teller, dentre outros, elaboramos um conceito de *quanta*, tendo por base características dadas pela descrição proporcionada pela mecânica quântica das partículas elementares. Analisamos mais detalhadamente uma interpretação possível de tais entidades como objetos 'nomológicos' (dados por leis), caracterizados unicamente por suas propriedades. Isso se faz no contexto das chamadas teorias 'negativas' relativas ao conceito de *substância*. Argumentamos que se se deseja preservar a idéia de tais objetos e de sua

[9] Ver o início do Capítulo seguinte.

indistinguibilidade, então a lógica subjacente a uma teoria de tais objetos deve violar um dos princípios basilares da lógica tradicional, conhecido como Lei de Leibniz.

No Capítulo 2, erigimos a teoria $\mathfrak{Q}$. Alguns quase-conjuntos, aqueles que denominamos *quase-conjuntos puros*, são interpretados como 'coleções de *quanta*'.

A teoria apresentada fundamenta-se em alguns de nossos trabalhos anteriores, e pode ser dita ser uma reconstrução mais adaptada à idéia de 'coleções de *quanta*' do que as versões anteriores das teorias de quase-conjuntos. Ademais, afim de esclarecer o leitor, mostramos ao longo do texto em que sentido a teoria $\mathfrak{Q}$ difere das apresentadas anteriormente, por exemplo no que se refere ao axioma 'fraco' da extensionalidade. Ademais, delineamos ainda uma prova de que a teoria $\mathfrak{Q}$ é equiconsistente com ZFC (Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha).

No Capítulo 3, mencionamos algumas 'aplicações' da teoria $\mathfrak{Q}$; em especial, discutimos o papel *intensional* de tal teoria. Destaca-se a faceta intensional da física quântica e utiliza-se a teoria $\mathfrak{Q}$ para estruturar análises adequadas ao fato de que "a microfísica é um mundo de intensões" [37, p. 281].

No Capítulo 4, discutimos algo acerca do conceito de 'estrutura física', em especial daquelas nas quais as linguagens da microfísica possam ser interpretadas, em particular se se considera um *predicado de Suppes* [107, 109, 24, 27] para mecância quântica axiomatizada por intermédio da teoria dos espaços de Fock, não sem antes termos mencionado no Capítulo 1 toda a problemática relacionada a 'rótulos', típicos da primeira quantização. Veremos que, se desejamos reter as intuições de Schrödinger acerca da 'verdadeira natureza' dos *quanta*, as estruturas físicas que objetivam ser modelos de tal predicado deveriam ser erigidos numa teoria de quase-conjuntos, como $\mathfrak{Q}$.

Finalmente, apresentamos outros tópicos relacionados com o tema, apontando problemas e sugerindo desenvolvimentos. Em especial, destacamos o tema da 'identidade vaga' em conexão com o caso da não-individualidade de partículas elementares e com as lógicas sortais, e esboçamos tentativamente argumentos que apontam para a necessidade de se desenvolver uma *mereologia quântica*, ou seja, uma mereologia[10] adaptada para a física, em especial para a física quântica.

Antes de tentar oferecer qualquer tipo de resposta à problemática de que trata, esta tese pretende contribuir com aquelas tentativas que visam conectar áreas que no decorrer deste século tenderam a se separar, como matemática, a física e a filosofia, sem o que qualquer articulação no sentido de se tentar entender questões gerais acerca dessas disciplinas, como por exemplo a problemática do tratamento matemático de coleções de objetos indistinguíveis, se torna parcial e incompleta.

De resto, este trabalho talvez se preste para destacar a necessidade de se considerar o estudo da lógica em geral e de matemáticas alternativas à tradicional no contexto atual dos fundamentos da matemática, uma vez que esta disciplina

[10] Dito de modo breve, 'a lógica do todo e das partes'.

nunca deixou de ser, não obstante a 'autonomia' alcançada neste século, o alicerce *par excellence* das disciplinas das ciências reais. O conhecimento de tais assuntos, sem dúvida, pode prestar inestimável auxílio ao estudo e na fundamentação também dessas disciplinas, e não só da matemática tal como a entendemos hoje.

Capítulo 2

O Problema de Manin

> The development of the foundations of physics in the twentieth century has tought us a serious lesson. Creating and understanding these foundations turned out to have very little to do with the epistemological abstractions which were of such importance to the twentieth century critics of the foundations of mathematics: finiteness, consistency, constructibility, and, in general, the Cartesian notion of intuitive clarity. Instead, completely unforessen principles moved into the spotlight: complementarity, and the nonclassical, probabilistic truth function. The electron is infinite, capricious, and free, and does not at all share our love for algorithms.
> Yu. I. Manin (1977)

2.1 Colocação do Problema

Em 1974, durante as atividades do Congresso sobre os Problemas de Hilbert, organizado pela Americam Mathematical Society, elaborou-se uma Lista de Problemas da Matemática Atual, com o intuito de apontar problemas a serem investigados nas diversas áreas da matemática, mais ou menos nos moldes da célebre lista de 23 problemas apresentada em Paris por David Hilbert, em 1900 [60].

Na Seção I: Fundamentos da Matemática, as questões foram elaboradas pelo matemático russo Yu. I. Manin nos sequintes termos:

> In accordance with Hilbert's profecy, we are living in Cantor's paradise. So we are bound to be tempted.
>
> Most mathematicians nowdays do not see any point in banning infinity, nonconstrutivity, etc. Gödel made clear that it takes an infinity

> of new ideas to understand all about integers only. Hence we need a creative approach to creative thinking, not just a critical one. Two lines of research are naturally suggested.
>
> (a) to find out new axioms of (more or less naive) set theory, demonstrably efficient in number theory. Most advanced new methods (l-adic cohomology) should be explored thoroughly. Are they readily formalized in Zermelo-Fraenkel or Gödel-Bernays systems ? Can we use in necessary categorical constructions only known axioms, or has something new already slipped in ?
>
> (b) We should consider possibilities of developing a totally new language to speak about infinity. Classical critics of Cantor (Brouwer *et al.* argued that, say, the general choice axiom is an illicit extrapolation of the finite case.
>
> I would like to point out that this is rather an extrapolation of common-place physics, where we can distinguish things, count them, put them in some order, etc. New quantum physics has shown us models of entities with quite different behaviour. Even 'sets' of photons in a looking-glass box, or of electrons in a nickel piece are much less cantorian than the 'set' of grains of sand. In general, a highly probabilistic 'physical infinity' looks considerably more complicated and interesting than a plain infinity of 'things'.
>
> Certainly there are no *a priori* reasons to choose fundamental concepts of mathematics so as to make them parallel to those physics. Nevertheless it happened constantly and proved extremelly fruitful.
>
> The twentieth century return to Middle Age scholastics taught us a lot about formalisms. Probably it is time to look outside again. Meaning is what really matters. [80]

A busca por axiomas que permitam tratar, no sentido das teorias de conjuntos, aquelas coleções de objetos que, como diz Manin, não possam ser contadas, colocadas em alguma ordem, etc., tal como ele sugere ocorrer com as partículas elementares da física atual é, como já se disse, o que nos diz respeito nesta tese.

Pelo contexto em que foi colocada, esta linha de pesquisa, que denominamos O Problema de Manin, torna-se uma questão relevante no âmbito dos fundamentos da matemática atual. Analisando o problema, de imediato a questão desdobra-se em duas outras: em primeiro lugar, qual seria a 'natureza' daquelas entidades, que demandariam o desenvolvimento, como sugere Manin, de 'novos axiomas' ? Em segundo lugar, por que haveria dificuldade em se tratar tais coleções, não obstante o extraordinário desenvolvimento alcançado pela matemática tradicional? Esclarecimentos acerca destas duas questões serão articuladas neste Capítulo.

2.2 Objetos Clássicos Vs. Objetos Quânticos

Vários autores, como W. Heisenberg [58, 59], E. Schrödinger [101, 102, 103], N. Bohr [5], para citar alguns dos iniciadores da física quântica, apontaram para a 'estranha realidade' das entidades básicas da matéria, as partículas elementares. De certo modo, pode-se inferir dos escritos desses três autores fundamentais que eles chegaram a ventilar a possibilidade da utilização de novos conceitos lógicos no contexto da microfísica, ainda que não explicitamente. Com relação a Schrödinger, isso seria devido ao fato de que para ele o conceito clássico de identidade carece de sentido para as partículas elementares [101, pp. 16–18]. Heisenberg, por outro lado, disse que se "quisermos falar alguma coisa acerca das próprias partículas atômicas, devemos utilizar o esquema matemático da teoria quântica[1] [...] ou, então, combiná-lo com uma linguagem que faça uso de uma lógica modificada ou, mesmo, que não utilize nenhuma lógica bem definida" [58, Cap. 10]. Bohr, por outro lado, quando formulou o princípio da complementaridade, aparentemente impôs implicitamente que a lógica subjacente a uma teoria que o admita deve ser distinta da clássica.[2]

Mas, em que sentido o tratamento de tais entidades demandaria o uso de conceitos (e mesmo lógicas) distintos dos tradicionais ? A problemática é ampla e muito discutida na literatura, podendo ser analisada sob vários pontos de vista, e não poderemos nos deter aqui em todos os seus aspectos.[3] O que desejamos enfatizar é que uma concepção (plausível) de partículas elementares como *objetos nomológicos*, ou seja, entidades 'não-individuais' dadas exclusivamente por uma coleção de leis físicas, num sentido que esclareceremos abaixo, demandam o desenvolvimento de 'novos axiomas', como sugere Manin, os quais serão apresentados no Capítulo seguinte.

Inicialmente, no entanto, vejamos resumidamente de que modo a mecânica quântica tradicional opera com o conceito de *indistinguibilidade* de partículas elementares.

2.2.1 O Postulado da Indistinguibilidade

Para os nosso propósitos, não é necessário reproduzir aqui toda a estrutura axiomática da mecânica quântica, para a qual reportamos o leitor, se ele julgar necessário, a textos como [65, 85, 78, 97].

A mecânica quântica formula o conceito de partícula elementar caracterizando tais entidades de acordo com um certo número de propriedades essenciais que verificam, chamadas de *propriedades intrínsecas*.[4] Por exemplo, citando

[1] Ainda que isso não nos conduza ao problema central da individualidade, como argumentamos no Captítulo 2.

[2] Em [75], mostramos que perante uma adequada interpretação do que se entenda por 'complementaridade' –um conceito reconhecidamente difícil de interpretar–, a lógica subjacente a uma teoria que admita um tal princípio pode vir a ser uma lógica de Jaśkowski, que é um caso particular de lógica paraconsistente.

[3] Ver no entanto o Capítulo 4.

[4] Essa terminologia é devida a Jauch. Ver [65]. Em [47], S. French refere-se ao trabalho (por nós não consultado) de P. E. Hodson, 'Existence criteria in elementary particle physics',

um caso que será explorado outras vezes, do ponto de vista físico todas as entidades que têm massa $m = 9,1 \times 10^{-28}g$, carga elétrica $e = 4,8 \times 10^{-10}e.s.u.$ e spin 1/2 são elétrons e, desse prisma, todos são os elétrons são 'idênticos' ou *indistinguíveis*, como preferimos dizer.

No tratamento dado pela mecânica quântica à questão da indistinguibilidade de partículas elementares, não obstante a possibilidade de partículas virem a ser indistinguíveis no sentido acima, ou seja, em concordarem em todas as suas propriedades intrínsecas, há a hipótese de que elas são (ao menos conceitualmente) individualizáveis, nomeáveis, podendo receber 'rótulos', ou *nomes*, como 'partícula 1', 'partícula 2', etc., o que serve para diferenciá-las umas das outras (é suficiente que analisemos o caso de duas partículas).

Supondo então que estejamos considerando duas partículas '1' e '2', os estados da primeira delas são representados por vetores unitários de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, enquanto que os da segunda partícula são representados por vetores unitários em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$. O sistema conjunto tem estados representados por vetores no produto tensorial $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Um vetor que indique que a partícula '1' está num estado a e que a partícula '2' está num estado b é escrito $|a(1)\rangle \otimes |b(2)\rangle$. Assim, $|b(1)\rangle \otimes |a(2)\rangle$ descreve uma situação física distinta da anterior.[5] No caso de partículas indistinguíveis, isto é, que concordam em todas as suas propriedades intrínsecas, toma-se $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

Os operadores auto-adjuntos sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ representam propriedades ou quantidades físicas;[6] 'medir' a quantidade P para um sistema no estado $|\psi\rangle$ é resolver a equação em autovalores $P|\psi\rangle = c|\psi\rangle$. O autovalor c é interpretado como o 'valor' da medida do observável representado por P para o sistema físico no estado $|\psi\rangle$. Desse modo, podemos reler o vetor $|a(1)\rangle \otimes |b(2)\rangle$ de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$; entende-se que representa o estado de um sistema no qual uma partícula, rotulada '1' tem autovalor a relativo a um certo operador P, enquanto que uma partícula rotulada '2' tem autovalor b para P.

Por outro lado, se P é um operador autoadjunto sobre $\mathcal{H}$, pode-se encontrar uma base ortonormal para $\mathcal{H}$ constituída por autovetores de P. Escreveremos $P|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ para tais autovetores de P, de sorte que a base pode ser denotada por $\{|a_i\rangle\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Assim, se $|\psi\rangle$ é um vetor arbitrário de $\mathcal{H}$, pode-se escrever $|\psi\rangle = \sum_i c_i|a_i\rangle$ para c_i escalares complexos tais que $c_i = \langle a_i|\psi\rangle$, sendo que $\langle , \rangle$ denota o produto interno de $\mathcal{H}$ (tais c_i são, portanto, os 'coeficientes de Fourier' na expansão de $|\psi\rangle$ como combinação linear dos vetores da base ortonormal).

A mecânica quântica é uma teoria probabilística, no sentido de que toda informação de que podemos dispor acerca do estado de um sistema, ou seja, o conhecimento do vetor que descreve o seu estado é uma informação proba-

---

Reprint, Oxford Univ. Nuclear Physics Lab., Rep. Ref. 27/80 para um esquema de classificação de partículas, baseado em suas propriedades intrínsecas, usado pelos físicos.

[5] Essa observação será relevante para nós à frente.

[6] Obviamente, estamos simplificando bastante a exposição afim de nos atermos unicamente ao ponto que nos interessa diretamente. A questão de se saber se todo operador autoadjunto tem ou não significação física é muito discutida, mas não nos concerne abordá-la aqui. Do mesmo modo, assume-se que o operador *é identificado* com a quantidade física que representa, por facilidade. Ver [97].

bilística. Se o estado de um sistema é $|\psi\rangle$, então, sendo Q um observável, a probabilidade de se obter na medida de Q um valor, digamos a, como um de seus autovalores, é dada por $|\langle a|\psi\rangle|^2$, o quadrado do valor absoluto do produto interno entre o vetor de estado $|\psi\rangle$ e seu autovetor $|a\rangle$, correspondente ao autovalor considerado.

Finalmente, o 'valor esperado' (*expectation value*), ou esperança matemática, das medidas de Q para o sistema no estado $|\psi\rangle$ é dada por $\sum_i a_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2$, que é representada por $\langle\psi|Q|\psi\rangle$.

Em particular, o operador a ser considerado pode ser um operador de 'permutação'; por exemplo, P pode ser tal que $P|a(1)\rangle \otimes |b(2)\rangle = |b(1)\rangle \otimes |a(2)\rangle$, ou seja, P 'permuta as partículas', agora sendo '1' que tem autovalor a enquanto que '2' tem autovalor b.

Denotando por $|P\psi\rangle$ o vetor $P|\psi\rangle$, e admitindo que ele efetua uma permutação arbitrária de (rótulos) de partículas, então a hipótese de que partículas podem ser 'absolutamente indistinguíveis' é introduzida por meio do que se denomina *Postulado da Indistinguibilidade*:

$$\langle P\psi|Q|P\psi\rangle = \langle\psi|Q|\psi\rangle$$

no qual Q é um observável qualquer. De acordo com este postulado, o valor esperado de qualquer observável Q não pode diferenciar entre os estados $|\psi\rangle$ e $|P\psi\rangle$ do sistema. Em outras palavras, permutações de partículas não são 'observadas'. Esta impossibilidade de distinguir entre estados que difiram unicamente por uma permutação de partículas é precisamente o significado da noção de indistinguibilidade de partículas elementares na mecânica quântica convencional [99, p. 205].

Uma condição suficiente para que o Postulado da Indistinguibilidade seja satisfeito é que $|P\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$ (cf. [76, 99]). Deste modo, o postulado pode ser visto como uma restrição sobre os estados possíveis do sistema, permitindo apenas a existência de estados simétricos e anti-simétricos correspondentes a dois tipos de estatísticas possíveis: Bose-Einstein e Fermi-Dirac.

Com um pouco mais de detalhe, vejamos como o dispositivo de se postular o princípio acima é um artifício matemático para se contornar o fato das partículas terem sido 'rotuladas', individualizadas conceitualmente como 'partícula 1', 'partícula 2', etc.,[7] o que constitui uma das questões problemáticas com relação aos fundamentos lógicos da mecânica quântica. Com efeito, continuemos admitindo que temos duas partículas, '1' e '2' e raciocinemos nos moldes da física clássica, assumindo ainda que tenhamos dois estados possíveis para essas partículas, digamos o estado a e o estado b, e que a representação dos estados seja dada nos moldes acima descritos. Então, as possibilidades para o sistema conjunto seriam as seguintes:

[7]Fato análogo ocorre por exemplo quando se estabelece a equação de Schrödinger usando-se (não há outro modo) as coordenadas das partículas, que de certo modo as individualizam. Mas então, para contornar esta 'identificação' proporcionada pelas coordenadas, postula-se que somente soluções simétricas e anti-simétricas da equação são as que interessam. Em outras palavras, só se consideram aquelas soluções que não são alteradas por uma permutação de coordenadas.

1. $|a(1)\rangle \otimes |a(2)\rangle$ (ambas no estado a)
2. $|b(1)\rangle \otimes |b(2)\rangle$ (ambas no estado b)
3. $|a(1)\rangle \otimes |b(2)\rangle$ ('1' no estado a e '2' no estado b)
4. $|b(1)\rangle \otimes |a(2)\rangle$ ('2' no estado a e '1' no estado b)

Os casos 3 e 4, em analogia com a física clássica, na qual as entidades são identificáveis, deveriam ser contados como casos distintos. Ou seja, uma coisa é a partícula '1' estar no estado a e a partícula '2' estar no estado b, e outra é o inverso. Mas isso atestaria o fato de que, em tais situações, 'permutações' seriam tidas como 'observáveis', dando origem a situações distintas, fato esse contrário ao que diz a teoria, tendo em vista o postulado da indistinguibilidade.

Em resumo, a idéia de que os estados 3 e 4 deveriam ser distintos seria devido ao fato de que as partículas refletiriam a idéia do 'objeto físico clássico', aquela espécie de entidade descrita pela mecânica clássica, cujas principais características, cabe lembrar, estão entre as seguintes:[8] existência e a persistência no espaço e no tempo, na acepção de que faz sentido dizer de um certo indivíduo que ele pode ser identificado como sendo o mesmo objeto que tenha existido em um tempo precedente. Além disso, tais entidades claśsicas podem ser objetos de predicação, sendo passíveis de terem propriedades que podem ser reorganizadas, de sorte que há diferença entre, por exemplo, um primeiro indivíduo ter uma propriedade P e um segundo ter a propriedade Q e o inverso.

Em especial, então, se permutarmos dois indivíduos clássicos distintos de posição, obtemos uma configuração que é em algum sentido distinta da anterior, que precedia a permuta, o que nos leva a supor que para eles os arranjos 3 e 4 acima devam de fato ser distintos. Neste caso, como tais partículas poderiam ser consideradas como indistinguíveis, o que faria a diferença entre um estado e o obtido após uma permutação de partículas teria que ser algo que 'transcendesse' tais propriedades, alguma espécie de *quid* ou, como dizem alguns autores, alguma forma de 'substratum', havendo portanto subjacentemente a esta situação a idéia de uma *primitive thisness* [98, 99].

As partículas quânticas, no entanto, devido à não observabilidade de permutações, seriam destituídas de tal *quid*.[9] Com efeito, como também alertou Heisenberg [58], a física atual levou-nos longe das concepções da antiga concepção de um objeto físico dotado de individuação, e procura-se espelhar este fato por adequadas escolhas de vetores que representem unicamente estados simétricos e anti-simétricos ou, o que dá no mesmo, de soluções simétricas e anti-simétricas da equação de Schrödinger.

Com efeito, os estados possíveis para um sistema de duas partículas que se admite são os seguintes, dependendo se são bósons ou férmions:

Bósons:

1. $|a(1)\rangle \otimes |a(2)\rangle$

[8] Seguimos [99, 113].
[9] Ver a concepção de H. Post [93] de entidades não-individuais, que tratamos em [76].

2. $|b(1)\rangle \otimes |b(2)\rangle$
3. $(2)^{-1/2}(|a(1)\rangle \otimes |b(2)\rangle + |b(1)\rangle \otimes |a(2)\rangle)$

Férmions:

1. $(2)^{-1/2}(|a(1)\rangle \otimes |b(2)\rangle - |b(1)\rangle \otimes |a(2)\rangle)$

As situações em que ambas as partículas estão num mesmo estado não ocorrem para férmions em virtude do Princípio de Exclusão de Pauli. Portanto, os estados não simétricos 3 e 4 da página anterior simplesmente não se verificam.

No entanto, mesmo utilizando esse dispositivo, continua-se falando de 'partícula 1' e 'partícula 2', mesmo que permutações de tais entidades não sejam contadas como observáveis. Em outros termos, a solução alcançada não evita que se continue pensando as partículas como dotadas de 'algo'[10] que faz com que elas persistam sendo ao menos conceitualmente dotadas de alguma forma de 'substratum'. Em outras palavras, mesmo com o uso do postulado da indistinguibilidade ou procedimento equivalente, a mecânica quântica tradicional continua invocando a idéia de uma *primitive thisness*.[11]

Para fixar idéias acerca desse conceito de 'primitive thisness', pensemos, como sugere Teller, que seja possível catalogar todas as propriedades do objeto 1 e chamar este conjunto de P_1. Pensemos agora em despir o objeto 1 de suas propriedades; o que resta é o que a filosofia chama de 'bare particular', um objeto desnudo de atributos, o 'stuff' ao qual as propriedades se agregam. Por falta de uma palavra melhor, usa-se a expressão 'primitive thisness', ou 'substância' para expressar essa idéia [113]. A mecânica quântica, no entanto, pelo menos em princípio, deve ser contrária a essa idéia, como atestam os trabalhos de Post [93] e dos autores mencionados, inclusive Schrödinger. Resta portanto encontrar, como disse Schrödinger, uma linguagem adequada para expressar este fato (ver as seções seguintes), aparentemente sendo isso, enfim, o que quer dizer Manin com a sua colocação.

Ademais do problema meramente conceitual, que por sí só não é de fácil tratamento, há ainda outros inconvenientes que a idéia de uma 'primitive thisness' acarreta. Redhead e Teller chamam a atenção para o fato de que o formalismo acima delineado propicia o aparecimento de 'estruturas excedentes' (*surplus formal estructures*), deriváveis matematicamente (os vetores não simétricos 3 e 4 da primeira disposição anterior), mas que, não tendo qualquer contraparte empírica, deveriam ser evitadas, notadamente se há um formalismo alternativo que as elimine. A alternativa proposta por Redhead e Teller é usar o formalismo dos espaços de Fock, que é mais adequado neste caso. Este ponto será abordado no Capítulo 4.

Se a mecânica quântica dialetiza o conceito de objeto físico clássico, que tipo de entidade postula então? Insistimos mais uma vez que esta questão não é simples (ver [116, 103, 59]),[12] mas pode-se delinear suas principais características

[10] Um 'não sei o quê', como dizia Locke [79, 98].

[11] Na chamada segunda quantização, isso é parcialmente contornado, ainda que outros problemas ocorram, como mencionaremos no Capítulo 4.

[12] Em especial, [116] é bastante interessante nesse sentido.

de sorte a podermos prover uma teoria matemática em conformidade com o Problema de Manin acima mencionado.

Mais uma vez mencionando Toraldo di Francia, ele analisa em [118] uma situação que se conforma ao caso presente. Elabora um conceito de 'mundo físico possível', em analogia com a idéia de 'mundo possível' (em essência, um estado-de-coisas descrito por um conjunto não contraditório de sentenças de uma certa linguagem) como sendo um mundo possível cujas entidades não violam leis físicas (as quais, como ele alerta, dependem dentre outras coisas do momento histórico). Por exemplo, a sentença 'O Sol é escuro' poderia fazer parte de um mundo possível, assim como 'A Terra gira em torno do Sol' faz parte de um mundo físico possível. Se chamarmos de *fisicamente contingente* uma sentença que seja verdadeira em um mundo possível mas não em todos eles (não sendo 'fisicamente necessária'), então os objetos da física clássica oferecem uma enorme variedade de possibilidades de mundos físicos possíveis. De fato, tomemos uma propriedade (que poderia ser adequadamente vista como uma 'lei física') 'Ter massa igual a x', na qual x é um valor entre uma grama e 10.000 quilos. Note-se que é possível encontrar exemplos concretos de objetos físicos que preencham essa condição para possivelmente todos esses valores. No entanto, em se tratando de partículas elementares, as coisas não ocorrem de maneira tão ampla. Com efeito, um elétron por exemplo, como vimos, tem um valor bem determinado de massa, assim como das demais propriedades intrínsecas, não podendo assumir 'qualquer' valor como no caso dos corpos macroscópicos. Consequentemente, há, como diz Toraldo di Francia, "uma drástica redução no domínio da contingência" [116] com a consideração de *objetos nomológicos*. Tais entidades definem mundos físicos possíveis bem determinados e as entidades que satisfazem as leis físicas (propriedades) que os especificam são de certo modo absolutamente indistinguíveis.

Portanto, para responder a pergunta formulada linhas acima, podemos dizer que dentro da atividade conceitual que é a mecânica quântica (como aliás qualquer disciplina científica [21]), o conceito elaborado é aquele de uma entidade destituída de qualquer idéia de 'primitive thisness' ou 'substratum'. Sem querer polemizar com realistas, este é um fato, e não teria sentido tentar despir a entidade postulada de suas propriedades, como dito acima, do mesmo modo como Heisenberg alertou para o *nonsense* de se tentar dividir *ad infinitum* uma porção da matéria [59]. As entidades microscópicas que temos, os *quanta* que temos, portanto, são não-individuais, nomológicos.

Como então se pode caracterizar conceitualmente tais entidades que são dadas unicamente por propriedades (entendidas aqui como representando as leis físicas de que fala o autor acima), as quais não são dotadas de 'primitive thisness'? Uma resposta é afirmar que, não havendo nada para além das suas propriedades, tudo o que resta são precisamente essas propriedades, sejam elas quais forem.[13] Essa é, segundo pensamos, a linha seguida pelos idealizadores da mecânica quântica. Tendo em vista que a ciência, e esta disciplina em par-

[13]Poder-se-ia discutir acerca da natureza de tais propriedades. Há visões diversas a esse respeito, que podem ser vistas em [50, 49].

ticular, é uma atividade eminentemente conceitual [21], o conceito de partícula elementar elaborado é tal que resulta totalmente incompatível com qualquer idéia de 'primitive thisness'. Tudo o que há, de certo modo, como já aludido acima, são as propriedades 'essenciais' de uma entidade, ou, no caso, de uma classe de entidades.

A conjunção de tais atributos constitui o que chamaremos[14] de *intensão* da entidade em questão; as propriedades intrínsecas são as leis físicas que caracterizam a *intensão* dos *quanta* no contexto da física atual [117, pp. 222 e 342]. Falaremos mais sobre este ponto no Capítulo 3. Vejamos, no entanto, que tipo de problemas há a serem superados afim de obtermos uma descrição matemática adequada de tais entidades.

2.2.2 Problemas a superar

O primeiro problema, como já aludido por Schrödinger [103], é o relativo a uma linguagem adequada para se expressar essa questão da 'não-individualidade' dos objetos quânticos. Schrödinger foi um dos primeiros a assertar acerca dos problemas com a concepção de partículas individualizáveis, trazida da mecânica clássica. Para ele, partículas elementares não podiam ser concebidas como algo tendo uma identidade bem definida.[15] Sua motivação originava-se, segundo O. Darrigol [42], basicamente na crítica à interpretação de Copenhagen, a qual segundo ele não poderia proporcionar uma explicação intuitiva dos processos microscópicos. Disse Schrödinger:

> I believe the situation is this. We have taken over from previous theory the idea of a particle and all the technical language concerning it. This idea is inadequate. It constantly drives our mind to ask for information which has obviously no significance. Its imaginative structure exhibits features which are alien to the real particle. An adequate picture must not trouble us with this disquieting urge; it must be incapable of picturing more than there is; it must refuse any further addition. [...] The particle, as we shall see, is not an identifiable individual. [...] *It is not at all easy to realize this lack of individuality and to find words for it.* [103, pp. 204-5] (ênfases nossas); ver também [42, 26]).

A parte enfatizada na citação acima, dentre outras coisas, parece sugerir que Schrödinger já antevia a necessidade de uma nova linguagem, obviamente porque a clássica (entenda-se, a da matemática tradicional) era inadequada para proporcionar um tratamento consoante com a idéia de uma entidade destituída de individualidade.[16]

---

[14] Seguindo [37].

[15] Cf. [103]. Ver também [42, 2, 26] nos quais a posição de Schrödinger é discutida.

[16] Max Jammer menciona que, na fase preliminar da mecânica quântica, Heisenberg também teria se expressado no sentido de que os conceitos clássicos não se aplicavam às novas situações mas, ao invés de procurar uma linguagem nova, optou por restringir a aplicabilidade de certos conceitos clássicos, como velocidade, posição e momento. Seriam precisamente essas restrições, aparentemente, que teriam originado as célebres relações de incerteza. Ver [63, p. 325].

De qualquer modo, ainda que não mencionemos todos os detalhes,[17] percebe-se a ênfase na questão da não-individualidade das partículas elementares. Os trabalhos de Schrödinger nesse sentido, no entanto, são de natureza muito geral e não são conclusivos.

A não-individualidade das partículas elementares é também mencionada por H. Post em um trabalho de 1963 [93], o qual fornece uma motivação maior para o tratamento matemático, o qual realizamos em [76]. Para Post, a não-individualidade não é meramente a indistinguibilidade tomada ao limite, mas algo que deva ser atribuído a uma partícula desde o princípio: elas teriam essa característica primitiva. Como lembra ele, tanto as partículas clássicas quanto as quânticas podem ser 'indistinguíveis', no sentido de concordarem em todas as suas propriedades intrínsecas, mas as segundas diferem das primeiras por não disporem de um *quid*, uma 'primitive thisness', algo que Post denominou de 'Transcendental Individuality'. Segundo Post, os *quanta*[18] são entidades destituídas de qualidades secundárias, comportanto unicamente as 'essenciais' (esse ponto será retomado na subseção seguinte); são sem individualidade, sem substância; "There is no substance left in physics, only form. We have the grin without the cat" [93] (ver o nosso [76]).

Essa não-individualidade deve portanto, de acordo com essas idéias, ser primitiva. Isso sugere que as coleções de *quanta* não podem ser conjuntos no sentido usual, posto que um *conjunto* nada mais é do que, grosso modo, uma coleção de 'bare particulars' este conceito entendido no sentido exposto acima, ou seja, como uma coleção de entidades (distintas umas das outras, como dizia Cantor), e passíveis de terem propriedades, que iriam de certo modo classificando-as em determinadas categorias. Pelo contrário, a não-individualidade deve ser tomada 'right at the start', como disse Post [93]. Temos portanto delineada uma intuição fundamental que tentaremos explorar numa teoria matemática no Capítulo seguinte: as entidades fundamentais (no nosso caso, algumas delas)[19] não são dotadas de individualidade.

A questão da não-individualidade está presente não só na concepção das entidades básicas com as quais se pretende lidar, mas também na matemática (e na lógica) usada para tanto. Com efeito, a linguagem da mecânica quântica é a da matemática tradicional (um fragmento da linguagem da análise funcional clássica), a qual está inserida na das teorias usuais de conjuntos. Nesse arcabouço, no entanto, não há como expressar que duas entidades (que não sejam a mesma entidade) sejam indistinguíveis. Com efeito, a semântica usual aborda a questão da 'distinguibilidade' do modo seguinte (em resumo).

---

[17] Em 1992, realizou-se em Paris um congresso com a precípua finalidade de iniciar estudos acerca da filosofia de Schrödinger. Os trabalhos apresentados em tal congresso estão reunidos em [3].

[18] Ele não usa esta expressão.

[19] Fato essencial é, sem dúvida, a justificação de como uma entidade macrsocópica, que é em suma composta de entidades não-individuais, adquire individualidade. Para Schrödinger, há uma espécie de *Gestalt* envolvida. Esse ponto é sem dúvida fascinante, mas não nos concerne abordá-lo aqui; ver [2].

Seja L uma linguagem pelo menos de primeira ordem e seja $\mathfrak{A}$ uma interpretação para L no sentido usual da teoria dos modelos (ou da semântica generalizada, no caso de teorias de ordem superior, por exemplo no sentido apresentado no Capítulo 3 para a lógica $S_\omega\mathcal{I}$). Neste caso, o domínio da estrutura é um *conjunto* não-vazio D. A uma propriedade (predicado unário de L) associa-se um subconjunto de D, ao passo que a predicados n-ários associam-se relações n-árias sobre D. A linguagem L pode ser estendida a uma linguagem L' que contenha um *nome* c para cada elemento $d \in D$, de sorte que a função denotação pode ser estendida a uma função que associe aos elementos de D precisamente os seus nomes em L'. Se a linguagem é ao menos de segunda ordem, então vale ainda a chamada Lei de Leibniz $\forall x \forall y(x = y \leftrightarrow (F(x) \leftrightarrow F(y)))$ ou, equivalentemente, $\forall x \forall y(x \neq y \leftrightarrow \exists F(F(x) \wedge \neg F(y)))$. Em palavras, indivíduos *distintos* são distinguíveis por pelo menos uma propriedade. Não há indistinguibilidade no sentido apregoado anteriormente.

Essas condições, peculiares da semântica usual, são todas violadas pelos *quanta*.[20] Com efeito, se D é uma coleção de partículas indistinguíveis, mesmo que admitíssemos que L' contém um nome para cada uma das entidades,[21] não poderíamos definir a função denotação sem ambiguidade. Do mesmo modo, um predicado como 'elétron', por exemplo, não teria uma extensão bem definida. Na segunda parte do Capítulo 3, teremos a oportunidade de discorrer com mais detalhe sobre este ponto, inclusive formulando uma lógica intensional e uma semântica para ela, fundada numa teoria de quase-conjuntos, na qual pode-se expressar o fato de que uma constante pode não denotar e um predicado pode não ter uma extensão bem definida.

Mas, antes de encerrar o Capítulo, vamos articular tentativamente uma análise 'lógica' das entidades nomológicas, ou seja, ver como elas poderiam ser tratadas dentro de um arcabouço padrão.

%mottoIt is the theory which decides what we can observe.A. Einstein

2.2.3 Nomologicidade e Lógica

Como dito acima, investigaremos com mais detalhe a lógica subjacente a uma teoria que admita que algumas das entidades básicas de que trata são 'nomológicas', ou seja, caracterizadas unicamente por uma certa coleções de propriedades,[22] ainda que não discutamos a natureza de tais propriedades. Não há 'substratum'; logo, em certo sentido, admitimos que estamos investigando a lógica subjacente a uma 'teoria *negativa* relativamente ao conceito de substância' [95] que admita entidades indistinguíveis.

Como vimos acima, essa posição é bastante próxima daquela que admite que partículas elementares são certas conjunções de leis físicas, conceito esse

[20] Pelo que temos notícia, as primeiras menções explícitas nesse sentido vêm dos trabalhos de Dalla Chiara e Toraldo di Francia, que eram por nós desconhecidos quando iniciamos nossas investigações sobre o tema. Ver [37, 69].

[21] O que já é uma hipótese difícil de sustentar; lembremos Schrödinger dizendo que "não de pode marcar um elétron, não se pode pintá-lo de vermelho" [102].

[22] Tais entidades poderiam ser também denominadas de 'indivíduos de Russell', cf. [95].

como já enfatizado, que é incompatível com qualquer hipótese de uma 'primitive thisness', *quid*, 'substratum' ou *haeceitty* ou 'bare particulars'. Mais especificamente, o que sustentaremos é que o que é para ser considerado um *indivíduo* depende fortemente da lógica que se considere. Em particular, exemplificando mais uma vez com as entidades fundamentais de que trata a mecânica quântica, veremos que a lógica subjacente a uma teoria que admita entidades nomológicas (não-indivíduos) é uma lógica não-reflexiva [69, 77], na qual a Lei de Leibniz, que é um dos princípios basilares da lógica tradicional, como dito acima, não pode ser válida. Isso enfatiza o papel primordial de se estudar e desenvolver lógicas e matemáticas alternativas à tradicional, como sugerimos na Introdução. A Lei de Leibniz, cuja expressão em linguagem de segunda ordem foi mencionada acima, é, em suma o princípio que assevera que 'se os indivíduos a e b têm as mesmas qualidades, eles são na realidade o mesmo indivíduo, ou seja, $a = b$, e conversamente'.[23]

Suponha agora que Δ é um conjunto não vazio e que $\mathcal{P}$ é a classe dos atributos dos elementos de Δ. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mathcal{P}$ é enumerável, de sorte que podemos chamar de $P_1, P_2, \ldots$ seus elementos. Se $x \in \Delta$, vamos denotar por $\mathcal{P}_x$ o subconjunto de $\mathcal{P}$ cujos elementos são as propriedades de x.

Definição 2.2.3.1 *Para cada $x \in \Delta$, chamamos de* **rank** *de x (e escreve-se $rank(x)$) ao menor inteiro λ tal que existem $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots P_{x_\lambda}$ em $\mathcal{P}$ que* **individualizam** *x, no sentido de que se $y \in \Delta$ partilha com x (pelo menos) tais atributos P_{x_i}, então $y = x$, e isso não pode ser verificado por nenhuma coleção que não contenha pelo menos esses λ predicados. Além disso, se x e y partilham uma mesma coleção de predicados, dizemos que x e y são* **indistinguíveis** *relativamente aos atributos de tal coleção (chamemo-la de C), e denotamos este fato escrevendo $x \equiv_C y$.*

Nesse contexto, P_{x_i}, $i = 1, \ldots \lambda$, podem ser ditas serem as 'propriedades essenciais' de x. Note-se que não estamos fazendo suposições como acerca da existência do rank de x. Deve-se raciocinar do seguinte modo: *se* existir um λ como na definição precedente, *então* tal λ é o rank de x. Por outro lado, também não estamos fazendo suposição alguma acerca da natureza dos elementos do conjunto Δ. Algo nesse sentido será comentado abaixo.

Como consequência da definição precedente, resulta que se $x \notin y$, então $rank(x) \notin rank(y)$, o que implica $\exists P(P(x) \wedge \neg P(y))$. Este resultado é uma versão do Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (ver abaixo).

Indivíduos

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura

$$\mathcal{A} = \langle \Delta', P_k \rangle_{k \in K}$$

[23]Lógicas que violam essa lei foram por nós apresentadas em [69, 29].

na qual $\Delta' \subset \Delta$ e K é um conjunto de índices que contém somente índices $x_1, x_2, \ldots, x_k$ para elementos $x \in \Delta'$ com $x_i < rank(x)$, $i = 1, \ldots, k$. Em outras palavras, as propriedades são escolhidas de sorte que elas não individualizem os elementos de Δ'. Se dispusermos de uma linguagem L com nomes $a, b, \ldots$ para os elementos de Δ, então se interpretarmos L em $\mathcal{A}$, esta estrutura pode ser pensada como sendo uma 'estrutura parcial' para os elementos de Δ com respeito a individuação.

Vamos supor ainda que $\mathcal{A}$ possa eventualmente ser 'estendida' a uma estrutura *total*

$$\mathcal{B} = \langle \Delta, \mathcal{P} \rangle$$

na qual $\mathcal{P}$ é, como na seção precedente, a coleção dos atributos dos elementos de Δ. Em tal estrutura, os elementos de Δ podem ser 'individualizados'.[24] Vem então a seguinte definição:

Definição 2.2.3.2 *Um objeto $x \in \Delta'$ é um* **indivíduo** *se a estrutura parcial $\mathcal{A}$ pode ser estendida a uma estrutura total $\mathcal{B}$ como acima.*

De imediato surge a seguinte questão: em virtude do quê a estrutura parcial $\mathcal{A}$ não poderia ser estendida a uma estrutura total $\mathcal{B}$? Afim de articular uma resposta, devemos analisar algumas relações entre a natureza dos elementos de Δ', a possibilidade de estender $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ e a lógica.

Chamemos de **HIP. I** (hipótese I) a suposição (implícita acima) de que Δ é um conjunto no sentido usual das teorias usuais de conjuntos, ou seja, seus elementos podem ser considerados como entidades 'individualizáveis'.[25] Em outras palavras, os elementos de Δ, admitem algum Princípio de Individuação. Nesta situação, dois casos podem ocorrer:

Caso A: A estrutura $\mathcal{A}$ pode ser estendida a $\mathcal{B}$. Nesta situação, surgem dois subcasos:

> **(A1)** Se a Lei de Leibniz vale, então os elementos de Δ' são individualizados por suas propriedades contidas em $\mathcal{P}$, e neste caso podemos dizer que eles são *indivíduos* no sentido da definição precedente.
>
> **(A2)** Se a Lei de Leibniz não vale,[26] então mesmo no caso de a e b partilharem todos os mesmos atributos, não podemos inferir que sejam a mesma entidade. Em outras palavras, as propriedades não seriam suficientes para a individualização de uma entidade. Mas, se a e b partilham das mesmas propriedades, em virtude do quê poderiam não ser a mesma entidade ? Aparentemente, sua individuação, ou característica distintiva, só poderia advir de algo 'para além das propriedades', alguma espécie de *quid* no sentido já aludido.

[24] Mais à frente, falaremos algo acerca das propriedades possíveis dos elementos de Δ.

[25] Cantor dizia que um conjunto é uma coleção, reunida num todo, de objetos *distintos* de nossa intuição ou pensamento [9, p. 85].

[26] Nossas Lógicas de Schrödinger oferecem exemplos de sistemas lógicos nos quais tal lei não vale em geral. Ver [69, 29].

> Esta questão é delicada, e dificilmente haveria uma resposta breve. Mas fica a questão de se tenta articular uma maneira adequada de justificá-la. No entanto, afim de avançar um pouco na problemática, podemos imaginar que se a Lei de Leibniz é simplesmente falsa, isso pode se dar basicamente de dois modos: (1) para a e b em Δ, temos $a \notin b$ mas não existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P(a) \wedge \neg P(b)$. Neste caso, a e b podem ser ditos diferirem *solo numero*; (2) existe P como no ítem anterior, mas $a = b$. Isso no entanto não pode ocorrer em teorias fundadas na lógica clássica nas quais os indivíduos sejam nada mais do que a coleção de suas propriedades, posto que uma tal P seria uma qualidade de a mas não de b, contrariando a hipótese de que a e b são o mesmo objeto e de que um certo indivíduo deve ter as mesmas qualidades que ele próprio.

Caso B: A estrutura $\mathcal{A}$ não pode ser estendida a uma estrutura $\mathcal{B}$. Dois subcasos podem ocorrer:

> **(B1)** A Lei de Leibniz vale. Neste caso, apesar de não podermos individualizar os elementos de Δ', uma vez que a estrutura não se estende àquela que contenha as propriedades 'essenciais' dos objetos, podemos pensar que *se* a estrutura pudesse ser estendida, *então* a individuação poderia ser alcançada. Neste sentido, os elementos de Δ' podem ser considerados como individualizados 'conceitualmente', no sentido de [98, 99]. Em outros termos, podemos dizer que temos unicamente 'informações parciais' acerca dos elementos de Δ', uma vez que eles não podem ser discernidos uns dos outros mesmo no caso da Lei de Leibniz valer na lógica subjacente.
>
> **(B2)** Se a Lei de Leibniz não vale, os elementos de Δ' não podem ser individualizados nem ao mesmo 'conceitualmente'. Neste caso, a hipótese **HIP. I** mencionada acima é questionada, uma vez que a idéia intuitiva de objetos 'individuais' aparentemente perde o sentido. Em outras palavras, nesta situação não podemos assegurar que a a individualidade dos elementos de Δ' possa ser conseguida, e temos um exemplo de entidades tipicamente indistinguíveis.

Este último caso merece explicação mais detalhada. Com efeito, parece que a natureza das entidades a serem consideradas depende da lógica, posto que se estamos dispostos a assumir que há somente objetos que difiram 'solo numero', devemos rejeitar a Lei de Leibniz e postular que $\mathcal{A}$ pode ser estendida a $\mathcal{B}$. Por outro lado, se a Lei de Leibniz não vale, a impossibilidade de estender $\mathcal{A}$, no escopo de teorias que não admitem 'substratum', é incompatível com qualquer idéia intuitiva de um 'indivíduo', tal como ocorre com os *quanta*.

Não obstante, cabe notar que independentemente do que sejam na realidade os objetos do domínio Δ (como objetos de uma certa 'realidade'), o fato que se está expondo é que o que poderemos ou não deles falar depende em boa medida da lógica utilizada.

Indivíduos e Propriedades

Em um sentido amplo, por uma *propriedade* de um objeto a, entendemos qualquer sentença, formulada em uma linguagem adequada, a qual possa ser assertada verdadeiramente de a. Podemos representar tal fato por uma fórmula $A(x, y_1, \ldots, y_n)$, na qual x, y_i, $i = 1, \ldots, n$ são variáveis livres se A e x deve ser instanciada por (um nome de) a. Deste modo, podemos dizer que 'a é azul', 'a está entre b e c', 'a distância entre a e b é menor do que a distância entre c e d', e assim por diante, não precisando nos restringir a propriedades monádicas unicamente. Por simplicidade, representaremos a fórmula acima por $A(x)$, enfatizando somente a variável x.

Há no entanto uma propriedade monádica de a que merece consideração à parte. Trata-se do seguinte predicado I_a, definido por $I_a(x) \leftrightarrow x = a$ (formulado em uma linguagem com igualdade). Intuitivamente, I_a expressa a propriedade de 'ser idêntico a a', o que na lógica usual obviamente é verificado por a, face à hipótese de que todo objeto é idêntico a sí próprio.[27] Além disso, chamamos de Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) o fecho universal da seguinte fórmula:

$$(A(x) \leftrightarrow A(y)) \rightarrow x = y$$

na qual A é uma variável que percorre a coleção de todas as propriedades dos objetos x e y.

Admitamos por um momento que PII é falso, valendo sua negação, por exemplo na forma seguinte:

$$(A(x) \leftrightarrow A(y)) \wedge x \neq y$$

Nas teorias 'negativas' relativamente ao conceito de substância, nas quais nada há para além das propriedades de um indivíduo, objetos x e y que verifiquem a expressão acima diferem *solo numero*. O problema está em se considerar o predicado I_a entre os possíveis atributos de a. Com efeito, nessa situação, suponha que a e b são indivíduos distintos que verifiquem a negação do PII posta acima. Neste caso, desde que partilham todos os seus atributos, em particular partilharão I_a e então $a = b$, contrariando a hipótese de que são distintos. Em outros termos, se I_a é considerado entre os predicados de a, então PII deve ser um teorema da lógica subjacente.

O que resulta é que, se desejamos assumir que PII é um princípio falso,[28] então aparentemente devemos fazer uma restrição no que se entenda por 'propriedades' de um objeto, em especial eliminando coisas como I_a. Essa atitude, no entanto, nos parece *ad hoc* e não justificada. Por que deveríamos eliminar certos atributos possíveis apenas para nos conformar às derivações que desejarmos? Assim, se pretendemos trabalhar no escopo de uma teoria que não admita nada para além das propriedades de um objeto, nenhuma espécie de *quid*, como

[27] Mais precisamente, a lei reflexiva da identidade asserta que $\forall x(x = x)$, e pode ser derivada dos axiomas da identidade em linguagens de primeira ordem.

[28] Há muita discussão na literatura sustentando este ponto de vista. Ver [47, 50], nos quais se mostra que o PII é violado na mecânica quântica.

parece sugerir a mecânica quântica, e se PII não deve valer, afim de que possamos ter, como parece ser sugerido por essa teoria, entidades indistinguíveis sob todos os aspectos, duas alternativas surgem naturalmente:

1. A lógica subjacente deve ser tal que ambos $a = b$ e $a \neq b$ sejam admissíveis. As lógicas paraconsistentes [15, 19] podem ser usadas para tal fim, e se desejarmos que não valha a conjunção $a = b \wedge a \neq b$, como parece sugerir a intuição, podemos usar uma lógica de Jaśkowski, que é um caso particular de lógica paraconsistente.[29]. Neste caso, pode ocorrer que $\forall x P(X) \wedge \exists x \neg P(x)$, expressão essa que é teorema em alguns cálculos paraconsistentes. Deste modo, se x percorre a coleção dos atributos de a (hipótese essa que pode ser formalizada em uma adequada lógica de ordem superior), então podemos interpretar a fórmula acima como indicando que 'para qualquer propriedade P do objeto a, o objeto b tem essa propriedade, mas há uma propriedade específica de a (que pode ser I_a) que b não possui'. Desse modo, isto é, mediante um adequado câmbio da lógica subjacente, não precisamos fazer suposições *ad hoc* acerca das propriedades possíveis de um objeto.
2. Negar o status de *indivíduos* aos objetos em consideração.

Como vimos acima, um 'indivíduo' é uma entidade da qual se pode, ao menos conceitualmente –i.e., ainda que não na prática– pensar como nomeável, individualizável e, assim, distinguível de outros. Por um *não-indivíduo*, por outro lado, devemos entender uma entidade que viole essas características. Por exemplo: um não-indivíduo não pode ser 'nomeável', ou seja, receber um rótulo.[30] Um não-indivíduo não pode ser considerado idêntico ou distinto de outros, posto que neste último caso, teríamos que dizer em que sentido ele seria distinto dos demais. Por outro lado, se fosse idêntico a outros, não haveria mais do que *um* indivíduo. Aparententemente, a questão é que palavras como 'idêntico', 'distinto' são completamente dialetizadas nesse contexto.[31]

Evidentemente, por tudo o que já se disse, as partículas elementares da física atual constituem o melhor exemplo que temos de entidades não individuais no sentido acima.[32] E, do que se viu, concluímos que se estamos para considerar não-indivíduos de alguma espécie, em especial aceitando que falar de sua identidade ou diversidade não faz sentido, então o PII não pode ser aplicável. Reciprocamente, se PII não vale e se estamos admitindo que não há *quid*, então necessariamente nossa ontologia deve ser a de não-indivíduos de alguma espécie.[33]

---

[29] Pode-se obter tal lógica a partir de [23] definindo-se convenientemente um conceito de dedução adquado. Ver [75].

[30] Como já se mencionou, Schrödinger dizia que "não se pode nomear um elétron, pintá-lo de vermelho" [102].

[31] Schrödinger tambem dizia que o conceito de identidade carece de sentido para as partículas elementares da física atual [101]. Ver os nossos [69, 29].

[32] Em [76], analisamos com mais detalhe o conceito de não-indivíduos, mais de acordo com a posição de H. Post [93], a qual por sua vez é em muito similar à de Schrödinger [103].

[33] Essa questão, de que de certo modo a lógica pode condicionar a ontologia, é sustentada também em [20]. Pode-se ver também [64] sobre a dependência entre lógica e ontologia.

A entidade microscópica com a qual se tem que lidar, pelo que se viu, não pode ser abordada 'diretamente', e isso é, em essência, o que traduz o seu caráter de nomologicidade. G. Toraldo di Francia relata este fato numa passagem interessante, que nos permitimos reproduzir aqui. Trata-se, segundo ele, de uma passagem tirada do livro de J. Herschel 'Preliminary Discourse on the Study of Natural Philosophy':

> Na descrição vivaz e agradável feita pelo capitão Head a propósito de sua viagem através dos Pampas da América do Sul, encontramos uma situação que se conforma ao nosso caso. Um dia, o guia parou subitamente e, apontando para o céu, gritou: 'Um leão!'. Surpreso com tal exclamação acompanhada de tal gesto, olhou ele para o céu e percebeu o vôo de um condor fazendo o cerco a um certo ponto particular. Naquele ponto, fora do alcance da vista do guia, havia uma carcaça de um cavalo e, sobre a carcaça –como o guia bem o sabia– havia um leão, do qual o condor guardava distância. O sinal do pássaro servia ao guia do mesmo modo que a visão do leão servia ao viajante, ou seja, uma prova da existência do leão. [119, pp. 117-8] (tradução livre)

Toraldo di Francia ainda insiste que de certo modo o guia *via* o leão, posto que somente a presença de um felino daquele porte poderia fazer com que o condor guardasse distância. O físico, segundo ele, procede de maneira semelhante ao se acercar do objeto microscópico, não podendo aproximar-se e ver 'o leão'.

Em síntese, em determinados campos da investigação, como no caso da física de partículas, nos quais não temos 'acesso direto' às entidades para analisar suas propriedades, dentro da atividade conceitual que constitui a ciência em geral [21], estas acabam sendo como que estabelecidas por meio de leis físicas,[34] e neste caso é fundamental atentar para o aparato linguístico (em sentido mais amplo, a matemática) que dispomos para nela fundamentar nossas teorias e elaborar nossos conceitos.

Em muitas situações, portanto, aparentemente somos impelidos ao fato de que o arcabouço tradicional, oferecido pela lógica e pela matemática clássicas, não se afigura totalmente adequado. Por outro lado, a disponibilidade que se tem hodiernamente de várias lógicas e, como se disse, de várias matemáticas possíveis, faz com que os estudos atuais acerca dos fundamentos da matemática ganhem uma dimensão nova, tornando-se algo de extremo relevo para o contexto da atividade científica contemporânea, podendo servir de modo eficaz não só para o desenvolvimento das disciplinas em sí, mas para o estabelecimento de seus fundamentos.

No Capítulo seguinte, elaboramos uma teoria matemática que visa tratar 'conjuntisticamente' coleções de entidades que podem conter os *quanta* como

[34] Toraldo di Francia ainda comenta que caso similar se dá com certos objetos de escala astronômica como galáxias muito distantes, quasars e outros corpos celestes [119]. De certo modo, essa questão é uma volta a Locke, que já argumentava acerca de objetos que estão 'ocultos' de nós, precisamente os *minúsculos* e os que estão *muito distantes* [79].

elementos.

Capítulo 3

Fundamentação Matemática

> Beware, as usual, the lures of the classical imagination.
> Bas C. van Fraassen (1991)

3.1 A Teoria de Quase-Conjuntos $\mathfrak{Q}$

Nesta seção, apresentamos uma versão da teoria de quase-conjuntos, a qual denotaremos $\mathfrak{Q}$. Esta teoria é baseada nas versões apresentadas em [41, 31], mas é em muitos aspectos distinta delas. Ao longo do texto, na medida em que formos apresentando os axiomas e definições, iremos explicando em que sentido a presente teoria difere das anteriores, quais suas novidades e vantagens.

A linguagem da teoria $\mathfrak{Q}$ é a da lógica de primeira ordem sem igualdade; usamos x, y, z, u, v, w para denotar variáveis individuais, as quais percorrem um universo de quase-conjuntos e de 'átomos' (*Urelemente*), esses últimos divididos em dois grupos distintos: o dos m-átomos e o dos M-átomos. Intuitivamente, aqueles serão ditos 'microátomos', e podem ser pensados como representando microobjetos, ou seja, partículas elementares da física atual, os *quanta* caracterizados nos Capítulos anteriores, enquanto que estes serão denominados 'macroátomos', intuitivamente podendo ser pensados como representado os objetos macroscópicos que nos cercam.

Para esses últimos objetos, admite-se por simplicidade que a lógica clássica é válida em todos os seus aspectos, enquanto que, para os microobjetos, o conceito usual de identidade não será aplicável, como se verá. Os M-átomos são tratados em $\mathfrak{Q}$ como os *Urelemente* usuais das teorias de conjuntos com átomos.

Cabe enfatizar que a lógica subjacente a $\mathfrak{Q}$ é uma lógica não-clássica que denominamos de *não-reflexiva* [69, 77]. Talvez a única menção necessária acerca dos axiomas lógicos de $\mathfrak{Q}$ seja a que diz respeito a axiomas do tipo

$$\forall x A(x) \to A(t)$$

onde, como usual, t é um termo livre para x em $A(x)$. No entanto, como a idéia intuitiva é a de que a identidade não deva aplicar-se em geral, em nosso caso não poderemos tomar t como designando um objeto específico do domínio. Num axioma como o acima, t deve ser entendido como um *parâmetro*, denotando um objeto arbitrário do domínio do discurso. Alternativamente, poderíamos usar uma outra variável distinta de x no lugar de t no axioma precedente, caso isso implicasse em problemas com relação à liguagem de $\mathfrak{Q}$.

Os símbolos específicos de $\mathfrak{Q}$ são três predicados unários m, M e Z, dois predicados binários $\in$ e $\equiv$ e um símbolo funcional unário qc. Não há constantes individuais; os únicos termos de $\mathfrak{Q}$ são as variáveis individuais e as expressões da forma $qc(x)$, que intuitivamente significam 'o quase-cardinal de x'.

Por simplicidade, adotamos a seguinte convenção: $\forall_Q x(\ldots)$ abrevia $\forall x(Q(x) \to (\ldots))$, enquanto que $\exists_Q x(\ldots)$ abrevia $\exists x(Q(x) \wedge (\ldots))$. Eventualmente outros predicados podem ser usados em tais expressões ao invés de Q, como m, M ou Z.

Definição 3.1.0.3

1. $Q(x) := \neg(m(x) \vee M(x))$ *(x é um* **quase-conjunto***)*

2. $P(x) := Q(x) \wedge \exists y(y \in x) \wedge \forall y(y \in x \to m(y))$ *(x é um* **quase-conjunto puro***)*

3. $C(x) := M(x) \vee Z(x)$ *(x é um* **objeto clássico***)*

4. $E(x) := Q(x) \wedge \forall y(y \in x \to Q(y))$

5. [**Igualdade Extensional**] *Para todos x e y, se eles não são m-atomos, então*

$$x =_E y := \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \vee (M(x) \wedge M(y) \wedge x \equiv y)$$

6. [**Subquase-conjunto**] *Para todos x e y, se eles não forem átomos, então*

$$x \subseteq y := \forall z(z \in x \to z \in y)$$

Se $x \neq_E y$, isto é, $\neg(x =_E y)$, dizemos que x e y são **extensionalmente distintos**. Como é usual, $x \subset y$ significa $x \subseteq y \wedge x \neq_E y$. Obviamente, $x \subseteq y \wedge y \subseteq x \to x =_E y$. À frente, usamos símbolos como $\leq_E$ e $<_E$, dentre outros, para representar relações entre quase-cardinais. Sua justificativa vem de que tais símbolos têm um significado 'clássico' uma vez que há uma 'cópia' de ZFC em $\mathfrak{Q}$, como se verá. Afim de evitarmos confusões com a terminologia que será introduzida no Capítulo seguinte, *não usaremos $x \notin y$* como abreviação de $\neg(x \in y)$.

Os quatro primeiros axiomas de $\mathfrak{Q}$ são os *Axiomas da Indistinguibilidade*:

(Q1) $\forall x(x \equiv x)$

(Q2) $\forall x \forall y (x \equiv y \to y \equiv x)$

(Q3) $\forall x \forall y \forall z (x \equiv y \wedge y \equiv z \to x \equiv z)$

(Q4) $\forall x \forall y (\neg m(x) \wedge \neg m(y) \to (x \equiv y \to (A(x,x) \to A(x,y))))$, com as restrições sintáticas usuais.

Mais à frente (Teorema 3), poderemos provar que a igualdade extensional tem todas as propriedades da identidade clássica.

Intuitivamente, entidades extensionalmente iguais são 'a mesma entidade', enquanto que entidades indistinguíveis estão relacionadas por uma relação mais fraca, que espelha uma relação de equivalência apenas. A teoria clássica da identidade [70, 111] não é válida para os m-átomos.

Cabe observar que o fato aqui postulado de que vale o princípio de substitutividade para quase-conjuntos indistinguíveis, pode causar certo espanto. De fato, intuitivamente falando, como podemos pensar que 'tudo o que podemos dizer de um quase-conjunto podemos também dizer de um outro que lhe seja indistinguível' ? Por exemplo, a afirmativa de que tudo o que eu possa asseverar de uma coleção de elétrons, como daqueles que constituem os elétrons de meu lápis, depositado sobre a minha mesa de trabalho, possa também ser dito de uma coleção indistinguível dela (no sentido que será estabelecido pelo axioma **(Q26)**), por exemplo de uma coleção de elétrons que está no presente momento no planeta Saturno, aparentemente se afigura trivialmente falsa.[1] Com efeito, pensaríamos, a afirmativa de que a primeira coleção está sobre a minha mesa não se aplica à segunda, que está em Saturno, violando o axioma **(Q4)**.

Esta maneira de raciocinar, no entanto, é equivocada. Poderíamos dizer que é uma maneira 'classica', e não 'quântica', de pensar. Com efeito, na mecânica quântica não há sentido preciso em referirmo-nos a 'este particular elétron' ou a 'este particular fóton'. A afirmativa de que 'o primeiro elétron está aqui, enquanto que o segundo elétron está acolá' não tem nenhum significado, posto que isso implicaria (e aqui usaremos algo da notação usual da mecânica quântica) que o estado do sistema seria descrito por um vetor da forma $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$, que não é acessível a férmions, como visto. Ou seja, o estado a ser considerado deveria ser $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$, a menos de um fator de normalização que pode ser aqui desprezado. Essa é a essência da crítica ao formalismo da primeira quantização desferida por M. Redhead e P. Teller, como mostramos no Capítulo precedente. Pode-se pensar intuitivamente que há um *par de elétrons*, um aqui e outro acolá, mas é totalmente sem sentido dizer que um deles está aqui e que o outro está acolá; o mais correto é admitir que *ambos* estão partilhando do fato de estarem aqui e acolá, pelo fato de partilharem um estado de 'superposição', ou 'mistura' (*mixed state*) [123, p. 443].

Do nosso ponto de vista, podemos ler o axioma **(Q4)** como indicando que se os quase-conjuntos x e y são indistinguíveis, *é indiferente* qual deles seja

[1] Esta colocação reflete apenas a problemática intuitiva da questão, uma vez que diz respeito à questão de se especificar o que seriam as 'propriedades' de tais entidades, o que é muito discutível na literatura. Ver [50].

considerado em todas as assercões relevantes acerca de tais coleções.[2]

A seguir, apresentamos outros axiomas de $\mathfrak{Q}$.

(Q5) Nada é simultaneamente um microátomo e um macroátomo:

$$\forall x(\neg(m(x) \wedge M(x))$$

(Q6) Se algo tem elementos, é um quase-conjunto:

$$\forall x \forall y(x \in y \rightarrow Q(y))$$

(Q7) Todo conjunto é um quase-conjunto:

$$\forall x(Z(x) \rightarrow Q(x))$$

(Q8) Um conjunto não pode conter m-átomos como elementos:

$$\forall_Q x(\exists_m y(y \in x) \rightarrow \neg Z(x))$$

(Q9) Quase-conjuntos cujos elementos são objetos clássicos (cf. Def. 1.1;3 acima) são conjuntos:

$$\forall_Q x(\forall y(y \in x \rightarrow C(y)) \rightarrow Z(x))$$

Do oitavo axioma, um conjunto não pode conter m-átomos como elementos. Esse resultado, junto com o axioma precedente, sugere que tampouco os elementos de um conjunto podem ter m-átomos como elementos, o mesmo se dando com os elementos de seus elementos, e assim por diante. De maneira geral, os *conjuntos* são caracterizados em $\mathfrak{Q}$ como sendo aqueles quase-conjuntos cujo fecho transitivo (conceito esse definido de modo usual) não contém m-átomos.

(Q10) Entidades indistinguíveis dos m-átomos são m-átomos:

$$\forall x(m(x) \wedge x \equiv y \rightarrow m(y))$$

A razão de se postular **(Q10)** vem do fato de que pode-se provar que se x é um macroátomo (respect., um quase-conjunto), e se y é indistinguível de x, então y é um macroátomo (respect., um quase-conjunto). Com efeito, se $M(x)$ e $y \equiv x$, então $M(y)$ pelo axioma **(Q4)**. Do axioma **(Q5)**, y não pode ser um m-átomo e, da definição de quase-conjunto, y não pode ser um quase-conjunto tampouco. Raciocínio análogo pode ser aplicado quando x é um quase-conjunto. No entanto, como o axioma **(Q4)** não se aplica aos m-átomos, o mesmo não pode ser demonstrado quando x é um m-átomo; daí o axioma **(Q10)**.

[2] Como mencionado no Capítulo 1, e dito acima, é um problema difícil especificar o que sejam *todas* as 'propriedades' das partículas elementares.

Definição 3.1.0.4 (*Quase-conjuntos Similares*) *Se x e y são quase-conjuntos não vazios, então*

$$Sim(x,y) := \forall z \forall t(z \in x \wedge t \in y \rightarrow z \equiv t)$$

Intuitivamente, quase-conjuntos similares são constituídos por elementos de 'mesma espécie'. Por exemplo, coleções (quase-conjuntos) de elétrons são similares, assim como as de prótons ou as de quaisquer partículas elementares 'idênticas' (no jargão dos físicos). Com um pouco mais de propriedade, podemos dar um exemplo mais acurado, já que poder-se-ia pensar que elétrons podem ser distinguidos por exemplo pela sua localização espacial. Mas pensemos nos seis elétrons do nível 2p de um átomo de sódio; admitamos que x é formado por dois deles e que y é formado por 'outros' dois. Obviamente, $x \equiv y$.

(Q11) [*Conjunto Vazio*] Existe um conjunto que não tem elementos, que será denotado '$\emptyset$':

$$\exists_Z x \forall y(\neg(y \in x))$$

Numa versão anterior da teoria de quase-conjuntos, havíamos postulado que havia o *quase-conjunto vazio*. No entanto, no escopo de $\mathfrak{Q}$ não há como provar que tal quase-conjunto resultaria ser um conjunto, como parece interessante se supor.

(Q12) Conjuntos indistinguíveis são extensionalmente idênticos:

$$\forall_Z x \forall_Z y(x \equiv y \rightarrow x =_E y)$$

Este axioma relaciona os conceitos de indistinguibilidade e de identidade extensional no que diz respeito a algumas das 'entidades clássicas' (conjuntos), fazendo com que, para conjuntos, valham as propriedades usuais da identidade extensional (para tais entidades vale uma versão do usual axioma da extensionalidade).

(Q13)[*'Pseudo-Par'*] Dadas quaisquer duas entidades, há o quase-conjunto que contém todas as entidades que são indistinguíveis de uma ou da outra:

$$\forall x \forall y \exists_Q z(\forall t(t \in z \leftrightarrow t \equiv x \vee t \equiv y)$$

O 'pseudo-par' de x e y será denotado $[x,y]$. Do axioma, podemos formar também o 'pseudo-unitário' de x, denotado $[x]$. No entanto, mesmo no caso de x e y serem indistinguíveis, não se tem em geral que $[x]$ e $[x,y]$ sejam extensionalmente idênticos, pois não se pode asseverar que têm 'os mesmos' elementos. Observa-se ainda que o pseudo-par pode conter não somente x e y como elementos; analogamente, o pseudo-unitário de x em geral não contém unicamente x como elemento.

(Q14)[*Esquema da Separação*] Dado um quase-conjunto x e uma 'condição' $A(t)$ expressa na linguagem de $\mathfrak{Q}$, existe o quase-conjunto dos objetos de x que satisfazem a condição dada:[3]

$$\forall_Q x \exists_Q y \forall t(t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge A(t))$$

O quase-conjunto postulado será muitas vezes escrito $[t \in x : A(t)]$. Contrariamente ao que se dá com as teorias usuais de conjuntos, aqui perde-se a 'unicidade' do conjunto postulado. Com efeito, admita-se que x é uma certa coleção de partículas elementares, digamos elétrons, e que a condição $A(t)$ seja a seguinte: 't (é um elétron dessa coleção que) tem spin up medido na direção do eixo X'. Como se sabe, pode-se obter diferentes coleções de elétrons em medidas diversas dessa mesma propriedade, todas com a mesma (quase-)cardinalidade. Os quase-conjuntos obtidos, na nossa acepção, são indistinguíveis. O esquema da separação, portanto, pode-se dizer, provê, dependendo da natureza dos elementos de x, eventualmente não propriamente um subquase-conjunto de x, mas uma certa 'classe de equivalência' de subquase-conjuntos indistinguíveis. Este fato relaciona-se com a existência, na mecânica quântica, de predicados ('condições' sobre partículas elementares, se desejarmos) que não têm extensão bem definida, como apontado por exemplo em [34]. Ver também o nosso [30]. Este ponto será abordado no Capítulo 3.

(Q15)[*União*] Dado um quase-conjunto x cujos elementos sejam também quase-conjuntos, existe um quase-conjunto, dito *união* de x, cujos elementos são aqueles e somente aqueles que pertencem a pelo menos um dos elementos de x:

$$\forall_Q x(E(x) \rightarrow \exists_Q y(\forall z(z \in y) \leftrightarrow \exists t(z \in t \wedge t \in x)))$$

como é usual, o quase-conjunto y é denotado

$$\bigcup_{t \in x} t$$

enquanto que $z \cup w$ tem o seu significado habitual.

(Q16)[*Quase-conjunto Potência*] Para qualquer quase-conjunto x, existe o quase-conjunto y cujos elementos são os subquase-conjuntos de x:

$$\forall_Q x \exists_Q y \forall t(t \in y \leftrightarrow t \subseteq x)$$

Tal quase-conjunto será denotado por $\mathcal{P}(x)$. A definição abaixo introduz respectivamente os conceitos de 'parte pura' de um quase-conjunto x, de 'pseudo-par' ordenado e de 'pseudo-produto cartesiano'. Propriedades análogas às clássicas relativas a esses conceitos podem ser demonstradas sem dificuldade.

Definição 3.1.0.5

1. $\overline{x} := [y \in x : m(y)]$

[3]O conceito de 'condição' é o usual, podendo ser definido de maneira anláloga (levando em conta os símbolos da linguagem de $\mathfrak{Q}$) ao conceito de *frases* da teoria dos conjuntos apresentado com detalhes em [44, pp. 7-8].

2. $\langle x, y\rangle := [[x], [x, y]]$

3. *Para quaisquer quase-conjuntos x and y,*

$$x \times y := [\langle z, u\rangle \in \mathcal{PP}(x \cup y) : z \in x \wedge u \in y]$$

3.1.1 Relações

O conceitos de *relação* não difere daquele apresentado em outras teorias [69, 72, 30]. São relembrados aqui unicamente com a finalidade de tornar o texto mais auto-suficiente. Dizemos que w é uma relação entre dois quase-conjuntos x e y se satisfaz o seguinte predicado R:

$$R(w) := Q(w) \wedge \forall z(z \in w \to \exists u \exists v(u \in x \wedge v \in y \wedge z =_E \langle u, v\rangle))$$

Obviamente, como no caso clássico, $R \in \mathcal{PPP}(x \cup y)$. Como é usual, se $x =_E y$, dizemos que R é uma relação *sobre x*. O **domínio** de R é definido como sendo o quase-conjunto $Dom(R) := [u \in x : \langle u, v\rangle \in R]$, ao passo que o quase-conjunto $Ran(R) := [v \in y : \langle u, v\rangle \in R]$ é a **imagem** de R.

Como usual, uma relação R sobre um quase-conjunto x é uma **relação de equivalência** sobre x se for reflexiva, simétrica e transitiva em x, definições essas que têm o seu sentido habitual. Caso de interesse particular é o da a relação de indistinguibilidade, que tem essas propriedades, como estabelecido pelos axiomas **(Q1)**–**(Q3)**. Neste caso, dado um quase-conjunto puro x de quase-cardinal finito n,[4] as classes de equivalência dos elementos de x podem ser identificados com as coleções (subquase-conjuntos) de elementos entre sí indistinguíveis. Tais conjuntos quociente foram por nós identificados com os 'agregados efetivos' na acepção de H. Weyl em [71].

3.1.2 Ordem.

Definir uma relação de ordem sobre um quase-conjunto x, i.e., uma relação sobre x que seja reflexiva, anti-simétrica e transitiva, exigiria que, na anti-simetria, usássemos a relação de indistinguibilidade ao invés da igualdade para cobrir o caso geral de x conter m-átomos como elementos. Isso posto, uma tal relação não 'ordenaria' x no sentido intuitivo da palavra, posto que 'confundiria' entre seus elementos indistinguíveis. Com efeito, a anti-simetria diria simplesmente que se wRt e se tRw, então w e t seriam indistinguíveis. Uma tal relação, quando muito, poderia ser denominada de *pseudo-ordem* sobre x, não 'ordenando' entidades indistinguíveis, intuitivamente falando. Uma pseudo-ordem *estrita* (irreflexiva e transitiva), do mesmo modo, poderia fazer sentido unicamente entre elementos não indistinguíveis.

Axiomas do infinito e regularidade podem ser introduzidos de modo usual:

[4]Este exemplo pode ser generalizado, mas é suficiente que raciocinemos sobre quase-cardinais finitos e sobre quase-conjuntos puros. Ver o nosso [71] para detalhes sobre os 'agregados de Weyl'.

(Q17) [*Infinito*] $\exists_Q x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \wedge Q(y) \rightarrow y \cup [y] \in x))$

(Q18) [*Regularidade*] Quase-conjuntos são bem fundados, ou seja, dado x, não há cadeias infinitas da forma $\ldots \in x_2 \in x_1 \in x$:

$$\forall_Q x(E(x) \wedge x \neq \emptyset \rightarrow \exists_Q(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

Com base no que se desenvolveu até agora da teoria $\mathfrak{Q}$, pode-se mostrar sem dificuldade que é possível definir uma *traducão* da linguagem de ZFC na linguagem de $\mathfrak{Q}$, de sorte que há uma 'cópia' de ZFC em $\mathfrak{Q}$. Detalhes nesse sentido foram apresentados em [69, 72], e podem ser adaptados facilmente para o caso presente. Com efeito, basta interpretar o predicado de pertinência de ZFC no predicado de pertinência de $\mathfrak{Q}$, a igualdade de ZFC na igualdade extensional de $\mathfrak{Q}$ e restringir os quantificadores de qualquer fórmula de ZFC a conjuntos de $\mathfrak{Q}$, ou seja, a entidades que verificam o predicado Z. Isso posto, é fácil perceber que os axiomas de ZFC são traduzidos em fórmulas que são teoremas de $\mathfrak{Q}$.[5]

A tradução mostra que $\mathfrak{Q}$ é essencialmente mais forte do que ZFC, e então pode-se reconstruir em $\mathfrak{Q}$ a teoria usual de cardinais, assim como a dos ordinais, que são *conjuntos* particulares de $\mathfrak{Q}$, tendo portanto um comportamento clássico. Em particular, pode-se definir em $\mathfrak{Q}$ os seguintes conceitos: $card(x)$, que representará o cardinal de x, $Cd(x)$, que diz intuitivamente que x é um cardinal. Usaremos α, β, $\ldots$ para representar cardinais. Um quase-conjunto x é *finito* se seu quase-cardinal for um número natural; este fato será representado por $Fin(x)$.

Observamos uma vez mais que, com relação a quase-conjuntos em geral, uma vez que os m-átomos não são bem comportados relativamente ao conceito de identidade, estes não podem ser ordenados ou distinguidos por nomes próprios de modo não ambíguo, tal como ocorre (em princípio) com partículas elementares. No entanto, assim como há sentido físico afirmar-se que uma certa coleção de partículas elementares tem um determinado número de elementos, parece razoável admitir-se que para cada quase-conjunto há um 'quase-cardinal' associado, que é um cardinal no sentido usual. Os axiomas que regem esse conceito são os seguintes:

(Q19) A tudo o que não for um quase-conjunto, associa-se o quase-cardinal zero:

$$\forall x(\neg Q(x) \rightarrow qc(x) =_E 0)$$

(Q20) Para qualquer quase-conjunto, existe um único cardinal que é o seu quase-cardinal e que, no caso do quase-conjunto em questão ser em particular

[5]A linguagem da teoria ZFU, ou seja, Zermelo-Fraenkel com *Urelemente*, pode ser também traduzida na de $\mathfrak{Q}$ bastando interpretar os *Urelemente* como M-átomos e, neste caso, os quantificadores das fórmulas de ZFU devem ser restritos às entidades clássicas de $\mathfrak{Q}$, ou seja, aos x tais que $C(x)$, conforme Def. 1.1;3.

um conjunto, o seu quase-cardinal coincide com o seu cardinal em sentido usual:

$$\forall_Q x \exists ! y (Cd(y) \wedge y =_E qc(x) \wedge (Z(x) \rightarrow y =_E card(x)))$$

(Q21) Quase-conjuntos outros que o conjunto vazio têm quase-cardinal não nulo:

$$\forall_Q x (x \neq_E \emptyset \rightarrow qc(x) \neq_E 0)$$

O axioma seguinte assevera que se um certo quase-conjunto tem quase-cardinal α, então qualquer cardinal menor que α é o quase-cardinal de algum subquase-conjunto de x:

(Q22) $\forall_Q x (qc(x) =_E \alpha \rightarrow \forall \beta (\beta \leq_E \alpha \rightarrow \exists_Q y (y \subseteq x \wedge qc(y) =_E \beta))$

(Q23) O quase-cardinal de um subquase-conjunto de x não é maior do que o quase-cardinal de x:

$$\forall_Q x \forall_Q y \forall t (y \subseteq x \rightarrow qc(y) \leq_E qc(x))$$

(Q24) $\forall_Q x \forall_Q y (Fin(x) \wedge x \subset y \rightarrow qc(x) < qc(y))$

No próximo axioma, a expressão $2^{qc(x)}$ representará a quantidade de subquase-conjuntos x, informalmente tomada no seu sentido clássico. Deste modo, postulamos que

(Q25) $\forall_Q x (qc(\mathcal{P}(x)) =_E 2^{qc(x)})$

Algumas palavras auxiliarão a compreensão do aspecto intuitivo que move a formulação de tais axiomas, em especial deste último, ainda que para tanto façamos uso de alguns conceitos e axiomas que serão introduzidos abaixo.[6]

Imaginemos então a seguinte situação. Suponha que estamos considerando o já aludido nível 2p de um átomo de sódio. Nada pode discernir um do outro os seis elétrons que a ele pertencem. No entanto, raciocinamos como se houvessem 6 'entidades' em tal nível, e há evidências empíricas que sustentam tal suposição. Mas, como refletir este fato em nossa teoria? De modo mais geral, se um certo quase-conjunto, digamos x tem quase-cardinal α, tendemos a raciocinar como se x tivesse α elementos, neste caso todos indistinguíveis entre sí, num contexto em que Toraldo di Francia chamou de 'objectuação' [117, p. 222].[7] Então, se tomássemos os unitários fortes dos elementos de x (cf. Def. 1.6 abaixo), seria sensato supor que deveriam haver α de tais subquase-conjuntos, nos mesmos moldes da teoria clássica de conjuntos. Porém, por força do axioma da extensionalidade fraca (axioma **(Q26)** à frente), todos esses 'unitários' seriam

[6]Estas observações poderiam ser feitas formalmente no final desta seção, mas são aqui colocadas meramente afim de facilitar a visão intuitiva dos axiomas acima.

[7]Para ele, 'objectuação' seria essa tendência inata que temos de 'dividir o mundo' em objetos para deles falar. Ou seja, no caso, em se pensar que há α entidades num quase-conjunto x posto que $qc(x) =_E \alpha$.

indistinguíveis, e nada na teoria poderia discerní-los uns dos outros. O mesmo de dá, evidentemente, com os subquase-conjuntos de x que têm quase-cardinal 2, 3, e assim sucessivamente, até α. Nessa linha de raciocínio, seria aparentemente sensato esperar que $\mathcal{P}([x])$ tivesse quase-cardinal $\leq \alpha$; mais precisamente, seria de se esperar que $qc(\mathcal{P}(x)) =_E n$.

No entanto, o axioma **(Q25)** diz que isso não se dá, mas que mantém-se a característica intuitiva de que há α subquase-conjuntos em x com quase-cardinal 1 e, em geral, para cada $1 \leq i \leq \alpha$, há combinações de α elementos tomados à taxa i subquase-conjuntos com quase-cardinal i. Em outras palavras, o axioma **(Q25)** preserva o sentido intuitivo do termo 'objectuação', de sorte que podemos raciocinar, por exemplo, como se houvessem α elementos em x. Em outras palavras, há α 'unitários', ainda que todos sejam indistinguíveis entre sí. Os m-átomos, deste modo, permanecem podendo ser pensados como certo tipo de 'indivíduos' em sentido lógico.

O axioma seguinte é um dos axiomas mais característicos da teoria $\mathfrak{Q}$, denominado 'axioma da extensionalidade fraca'. Intuitivamente, **(Q26)** afirma que os quase-conjuntos x e y são indistinguíveis se tiverem 'a mesma quantidade de elementos de mesma espécie (entre sí indistinguíveis)'. Isso reflete de certo modo o atomismo de Dalton, para quem duas moléculas de água, por exemplo, seriam 'exatamente a mesma coisa'. A formulação do axioma é distinta daquela apresentada na teoria S^{**} , na qual se postulava que quase-conjuntos similares e de mesma quase-cardinalidade são indistinguíveis.

(Q26) [*Extensionalidade Fraca*]

$$\forall_Q x \forall_Q y (\forall t (t \in x \rightarrow \exists t' (t' \in y \wedge t \equiv t' \wedge qc([t] \cap x) =_E qc([t'] \cap y)))) \rightarrow x \equiv y)$$

Resulta de modo imediato o seguinte teorema (adotado como axioma em S^{**}):

Teorema 3.1.2.1 $\forall_Q x \forall_Q y (Sim(x,y) \wedge qc(x) =_E qc(y) \rightarrow x \equiv y$

3.1.3 Funções

O conceito de função requer mais cuidado que o de relação. Com efeito, uma função usual não distinguiria entre argumentos e valores se agisse sobre m-átomos. O máximo que podemos exigir é que uma tal função associe entidades indistinguíveis a entidades indistinguíveis. Introduzimos então o conceito de *quase-função* do seguinte modo [72]:

Definição 3.1.3.1 *Sejam x e y quase-conjuntos. Então f é uma q-***funcão** *de x em y se f é tal que (R é o predicado 'relação' definido acima):*

$$R(f) \wedge \forall u (u \in x \rightarrow \exists v (v \in y \wedge \langle u, v \rangle \in f)) \wedge$$

$$\forall u \forall u' \forall v \forall v' (\langle u, v \rangle \in f \wedge \langle u', v' \rangle \in f \wedge u \equiv u' \rightarrow v \equiv v')$$

Definição 3.1.3.2 *Se f é uma q-funcão de x em y e satisfaz a condição adicional:*

$$\forall u \forall u' \forall v \forall v' (\langle u, v\rangle \in f \wedge \langle u', v'\rangle \in f \wedge v \equiv v' \rightarrow u \equiv u')$$

$$\wedge qc(Dom(f)) \leq_E qc(Rang(f))$$

dizemos que f é q-função **injetora**, *ou q-***injeção** *de x em y, ao passo que f é uma q-função* **sobrejetora** *ou q-***sobrejeção** *de x em y se é uma q-função de x em y tal que*

$$\forall v (v \in y \rightarrow \exists u (u \in x \wedge \langle u, v\rangle \in f)) \wedge qc(Dem(f)) \geq_E qc(Rang(f)).$$

Ademais, uma f que é simultaneamente uma q-injeção e uma q-sobrejeção é dita ser uma q-função **bijetora**, *ou q-***bijeção**. *Neste caso, $qc(Dom(f)) =_E qc(Rang(f))$.*

Usamos a notação $B^x_y(w)$ para dizer que w é uma q-bijeção de x em y.

Com relação a algumas das identidades acima, observamos que no caso geral não há critério para se verificar se dois quase-conjuntos têm ou não a mesma quase-cardinalidade, já que não há algo como que um 'processo de contagem' bem definido para um quase-conjunto x se ele contém m-átomos como elementos. Com efeito, admita que x é um quase-conjunto puro (cf. Def. 1.1;2) cujo quase-cardinal é 6 (ou seja, x tem 6 elementos, intuitivamente falando). Por exemplo, x pode ser a coleção de elétrons do nível 2p de um átomo de sódio. Os físicos podem determinar experimentalmente que há 6 elétrons em tal nível, mas de modo algum podem discernir esses seis elétrons um do outro, como já se disse. Desse modo, se fossemos 'contá-los' estabelecendo uma bijeção de $6 = \{0, \ldots, 5\}$ em x, a qual elétron associaríamos cada um dos naturais $0, \ldots, 5$? Não há nenhum critério que deva prevalecer sobre qualquer outro. Em outras palavras, *funções* usuais não poderiam ser definidas.

Consequentemente, não poderíamos 'desenhar' ou escrever no papel uma tal q-função, como num exercício de casa. Dito de um modo mais preciso (usando o jargão clássico), o predicado 'f é uma quase-função de x em 6' não teria uma *extensão* bem definida, ou seja, o quase-conjunto dos pseudo-pares ordenados que pertenceriam a f não ficaria caracterizado de modo unívoco. Como um quase conjunto de pseudo-pares, f (ou melhor, a extensão de f) poderia ser escrita $f = [\langle 0, v_1\rangle, \ldots \langle 5, v_5\rangle]$, onde $v_1, \ldots, v_5$ denotam ambiguamente os elementos de x. Não há como fazer melhor. Um dos grandes problemas que aqui se colocam é precisamente a necessidade de se empregar a linguagem usual para nos referirmos a entidades que não se comportam de maneira usual.[8] As explicações intuitivas, metalinguísticas, ficam em muito comprometidas com isso, muitas vezes causando certa preplexidade e, eventualmente, certa suspeita por parte do leitor. Para tranquilizá-lo, se é que isso é possível, talvez devessemos

[8]Esse sempre foi, aliás, um dos mais intrincados problemas relativos aos fudamentos da mecânica quântica, como atestam por exemplo os escritos de Schrödinger [101, 102, 103]; ver também o nosso [26].

dizer como Heisenberg quando se referiu à não intuitividade dos conceitos quânticos: o único modo de compreendê-los é ler equações matemáticas, no caso, os axiomas de $\mathfrak{Q}$.

Teorema 3.1.3.1 (*'Extensionalidade'*)

$$\forall_Q x \forall_Q y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \equiv y)$$

Proof: Se x e y são quase-conjuntos que têm exatamente os mesmos elementos, então eles têm o mesmo quase-cardinal (essa 'desejável' propriedade resulta dos axiomas para quase-cardinais vistos abaixo). Como a relação de indistinguibilidade é reflexiva (axioma **(Q1)**), x e y são similares; logo, pelo Teorema 1, são indistinguíveis.

Por outro lado, resulta da Def. 1.1;5 que se $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)$, então $x =_E y$, mas isso não implica que $x =_E y$ seja em geral equivalente a $x \equiv y$. Essa equivalência só vale para x e y *conjuntos*, conforme **(Q12)**.

Definição 3.1.3.3 *Se $A(x, y)$ é uma fórmula na qual x e y são variáveis livres, dizemos que $A(x, y)$ define uma* **condição** *y-**(q-functional)** sobre um quase-conjunto t se $\forall w (w \in t \rightarrow \exists s A(w, s) \wedge \forall w \forall w' (w \in t \wedge w' \in t \rightarrow \forall s \forall s' (A(w, s) \wedge A(w', s') \wedge w \equiv w' \rightarrow s \equiv s'))$. Este fato será abreviado por $\forall x \exists ! y A(x, y)$).*

(Q27) [*Esquema da Substituição*]

$$\forall x \exists ! y A(x, y) \rightarrow \forall_Q u \exists_Q v (\forall z (z \in v \rightarrow \exists w (w \in u \wedge A(w, z)))$$

Em se tratando de quase-conjuntos, o esquema da substituição diz intuitivamente que as imagens de quase-conjuntos por quase-funções são também quase-conjuntos. De maneira similar ao que ocorre classicamente, postulando-se tal esquema, o esquema da separação pode ser dispensado.

Apresentamos a seguir uma nova versão do axioma da escolha. Na versão apresentada em [72], postulamos que se x é um quase-conjunto não vazio cujos elementos são dois a dois disjuntos e não vazios, então existe um quase-conjunto que contém indistinguíveis de cada um dos elementos dos elementos de x que pertencem a tais elementos de x. Ou seja, intuitivamente falando, para formar o 'quase-conjunto-escolha' tomávamos alguns (i.e., um subquase-conjunto de quase-cardinalidade adequada) dos indistinguíveis dos elementos dos elementos de x, uma vez que não havia como tomar 'um deles'. A forma abaixo, no entanto, é mais consoante com a idéia do axioma da escolha das teorias usuais de conjuntos. Isso é feito empregando-se a noção de 'unitário forte' dada pela definição seguinte.

Definição 3.1.3.4 (***Unitário Forte***) *O unitário forte de x é o quase conjunto x' que satisfaz a seguinte propriedade:*

$$x' \subseteq [x] \wedge qc(x') =_E 1$$

Em palavras, x' é o subquase-conjunto de $[x]$ que tem exatamente um elemento. Como vimos, o significado de '1' é o usual, posto que todo quase-cardinal é um cardinal (axioma **(Q20)**. Desse modo, temos um significado intuitivo para o que significa '*um* indistinguível de x'. O teorema abaixo fornece os argumentos para a existência do unitário forte de x.

Teorema 3.1.3.2 *Para um x qualquer, existe o unitário forte de x.*

Proof: Inicialmente, tomamos o quase-conjunto $[x]$ dos indistingíveis de x, dado pelo axioma do pseudo-par. O axioma **(Q20)** diz que todo quase-conjunto tem um quase-cardinal, e o axioma **(Q21)** diz que se o quase-conjunto não é vazio, seu quase-cardinal é ≥ 1, como ocorre com $[x]$, uma vez que, sendo $\equiv$ reflexiva, $x \in [x]$. Logo, $qc([x]) \geq 1$. Mas então, pelo axioma **(Q22)**, existe um subquase-conjunto de $[x]$ que tem quase-cardinal 1. Usando o esquema da separação, obtemos o subquase-conjunto x' tal como na definição precedente.

Obviamente, perde-se a unicidade do unitário forte. Dado x, todos os unitários fortes de x são indistinguíveis no sentido do axioma **(Q26)** e do Teorema 1. Isso no entanto não é de causar espanto; quando um físico fala que *um* elétron interage com um átomo para formar um íon e depois que *um* elétron é liberado pelo átomo para novamente formar o átomo neutro, não há como distinguir o elétron absorvido daquele que foi emitido, uma vez que ele entra em estado de superposição com os demais elétrons do átomo. Na verdade, não importa *qual* seja o elétron liberado: a questão 'O elétron que entrou é o mesmo que saiu ?' simplesmente não se coloca.

Isso posto, podemos formular o axioma da escolha do modo seguinte:

(Q28) [*Axioma da Escolha*]

$$\forall_Q x(E(x) \wedge \forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \rightarrow y \cap z =_E \emptyset \wedge y \neq_E \emptyset) \rightarrow$$
$$\exists_Q u \forall y \forall v(y \in x \wedge v \in y \rightarrow \exists_Q w(w \subseteq [v] \wedge qc(w) =_E 1 \wedge w \cap y \equiv w \cap u)))$$

O axioma estabelece que há sentido preciso a afirmativa de que o quase-conjunto u tem 'um' elemento de cada um dos elementos de x.

Podemos agora provar o seguinte resultado:

Teorema 3.1.3.3 *A igualdade extensional tem todas as propriedades da identidade clássica.*

Proof: Com efeito, se x e y são ambos M-átomos indistinguíveis, então são extensionalmente idênticos por definição (Def. 1.1;5); neste caso, o axioma **(Q4)** se aplica e este resultado, juntamente com o axioma **(Q1)**, provê as propriedades básicas da igualdade usual (reflexividade e substitutividade). Se no entanto x e y forem ambos quase-conjuntos, para que sejam indistinguíveis, pelo axioma Teorema 1, basta que sejam similares (cf. Def. 1.2) e que tenham a mesma cardinalidade. Mas se x e y forem extensionalmente idênticos (i.e., tiverem exatamente os mesmos elementos), obviamente terão o mesmo quase-cardinal e serão indistinguíveis, e então novamente o axioma **(Q4)** se aplica, com isso provendo os requerimentos básicos da identidade clássica. Logo, quer x e y sejam quase-conjuntos contendo exatamente os mesmos elementos, quer sejam M-átomos indistinguíveis, a igualdade extensional, aplicada a tais entidades, tem as mesmas propriedades da identidade usual.

Outro interessante resultado, que desempenhará papel importante abaixo, é o seguinte

Teorema 3.1.3.4 (*Não-Observabilidade de 'Permutações'*) *Seja x uma quase-conjunto e seja z m-átomo tal que $z \in x$. Se w é m-átomo indistinguível de z que não pertence necessariamente a x (ou seja, a única informação que dispomos é que $w \equiv z$). Então, se z' e w' são os unitários fortes de z e de w respectivamente, resulta que*

$$(x - z') \cup w' \equiv x$$

Proof: Consequência imediata do **(Q26)**.

Na expressão do teorema, a diferença de quase-conjuntos tem o seu significado habitual. Intuitivamente, o resultado expressa que 'nada muda' num quase-conjunto se um seu elemento é substituído por outro que lhe seja indistinguível.

O teorema precedente expressa em termos de quase-conjuntos um fato peculiar da mecânica quântica, a saber, a 'não observabilidade' de permutações entre partículas elementares 'idênticas', que já discutimos em [76].

Certamente, há que se desenvolver a teoria $\mathfrak{Q}$ do ponto de vista matemático, o que poderia apontar alguns detalhes interessantes e talvez sugerir a introdução de novos axiomas. Mencionaremos mais detalhes acerca disso no Capítulo seguinte e no Capítulo final. O que se apresentou aqui teve por base a idéia de se tratar de algum modo 'conjuntista' coleções de entidades indistinguíveis, com isso eventualmente contribuindo no sentido de se prover uma resposta ao Problema de Manin já aludido. Na seção seguinte, esboça-se o modo pelo qual se pode provar que $\mathfrak{Q}$ é equiconsistente com ZFC, resultado esse de interese matemático, posto assegurar que $\mathfrak{Q}$ é 'tão segura quanto' a matemática tradicional no que diz respeito à possibilidade de se derivar contradições.

3.2 Equiconsistência entre $\mathfrak{Q}$ e ZFC

Já mostramos em [74] que as teorias de quase-conjuntos S^* [72] e S^{**} [76] são equiconsistentes com ZFC. O mesmo pode ser mostrado com relação a $\mathfrak{Q}$. Não daremos todos os detalhes, unicamente chamando a atenção para as 'novidades' características de $\mathfrak{Q}$.

A tradução mencionada anteriormente da linguagem de ZFC na de $\mathfrak{Q}$ indica que temos uma 'cópia' de ZFC em $\mathfrak{Q}$. Desse modo, é imediato que, se $\mathfrak{Q}$ é consistente, então ZFC é consistente.

Quanto à recíproca, usaremos o argumento apresentado em [31] (adaptado para o caso de $\mathfrak{Q}$) que essencialmente permite construir um 'modelo' para $\mathfrak{Q}$ em

ZFC. A importância deste fato reside em que, se podemos interpretar quase-conjuntos 'classicamente', em particular os m-átomos, então aparentemente as teorias de quase-conjuntos seriam dispensáveis, bastando a teoria de conjuntos padrão para tudo o que desejássemos dizer, inclusive com relação a microobjetos. Este ponto de vista não deixa de ter sua razão, estando estreitamente relacionada com a interpretação de Copenhagen da mecânica quântica, defendida por Bohr, Heisenberg, von Weizsäcker, Rosenfeld, dentre outros. No entanto, embora o fato de se encontrar uma representação para os m-átomos na teoria clássica de conjuntos ter analogia com o fato de que a mecânica quântica se expressa mediante a linguagem da análise funcional clássica, isso não contorna objeções como as postas por Schrödinger com respeito à 'partícula real', que para ele deveria ser 'não-individual' [103].

Cabe ressaltar que uma coisa é se obter uma estrutura matemática que possibilite derivar as leis físicas necessárias para a explicação de certos fenômenos,[9] outra é obter um aparato matemático que permita tratar as entidades fundamentais de sorte que sejam preservadas suas caracterísicas como a não-individualidade. De fato, muitas das objeções de Schrödinger à escola de Copenhagen parecem ser dirigidas a este tipo de questionamento: simplesmente 'eliminando-se' microobjetos, não se obtém qualquer abordagem ao 'objeto físico real'. As intuicões de Schrödinger no sentido de encontrar uma linguagem adequada para expressar ambos os aspectos da matéria, i.e., ondas e partículas, até o momento aparentemente nunca se concretizaram de modo satisfatório [28, 42].

Todas as construções matemáticas que se seguem são consideradas em ZFC.

Definição 3.2.0.5 *Sejam m um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência sobre m. As classes de equivalência correspondentes serão denotadas por $C_1, C_2 \ldots$. Se $x \in m$, então pomos*

$$\widehat{x} := \langle x, C_x \rangle$$

sendo C_x a classe de equivalência à qual x pertence. Ademais,

$$\widehat{m} := \{\widehat{x} : x \in m\}$$

Seja agora $X := \widehat{m} \cup M$, sendo que $\widehat{m}$ é como acima e M é um conjunto tal que $\widehat{m} \cap M = \emptyset$. O objetivo é construir uma superestrutura $\mathcal{Q}$ baseada em X, a qual chamaremos de *Universo de Quase-Conjuntos*, e mostrar que $\mathcal{Q}$ é um 'modelo' para $\mathfrak{Q}$. Na definição abaixo, On denota a classe de todos os ordinais.

Definição 3.2.0.6

$$Q_0 = X$$
$$Q_1 = X \cup \mathcal{P}(X)$$
$$\vdots$$

[9] Heisenberg chegou a dizer que, para tanto, "não é necessário falar de partículas" [58, p. 49].

$Q_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} Q_\beta \qquad$ *se λ é um ordinal limite*

$\mathcal{Q} = \bigcup_{\alpha\in On} Q_\alpha$

Afim de nos conformarmos com a terminologia de $\mathfrak{Q}$, chamaremos os elementos de M de M-átomos, e os de $\widehat{m}$ de m-átomos. Essas serão interpretações a serem levadas em conta para se encontrar um 'modelo' para $\mathfrak{Q}$ em ZFC. No entanto, restam ainda os conjuntos de $\mathfrak{Q}$. Afim de se obter uma descrição adequada dessas entidades em ZFC, admitimos definida uma outra superestrutura nos mesmos moldes da introduzida acima, a qual chamaremos $\mathcal{Q}^f$, só que fundamentada unicamente em M ao invés de X. Como é evidente, os conjuntos de $\mathfrak{Q}$ serão precisamente os elementos de $\mathcal{Q}^f$.

Finalmente, introduzimos a seguinte

Definição 3.2.0.7 *Sendo $\widehat{m}$, m e R como acima, definimos sobre $\widehat{m}$ a relação $\sim$ por:*

$$\widehat{x} \sim \widehat{y} \ \text{ see } \ C_x = C_y$$

Se $\widehat{x} \sim \widehat{y}$, dizemos que x e y são **indistinguíveis**.

O que se percebe é que a definição acima identifica x e y pela classe de equivalência à qual pertencem, sem que se faça referência direta às entidades denotadas por x e por y. Isso cobre o caso interessante de x e y serem m-átomos. Com efeito, tendo em vista que o conjunto básico da superestrutura (no que diz respeito a m-átomos) é $\widehat{m}$, cujos elementos são pares da forma $\langle x, C_x\rangle$, então tanto x quanto y estão 'fora' de $\mathcal{Q}$.[10] Desse modo, podemos nos referir a 'entidades indistinguíveis' sem nomeá-las diretamente, como ocorre na física quântica. Note-se ainda que relações 'diretas' entre x e y, como por exemplo $x = y$ ou $x \neq y$ não fazem sentido no escopo de $\mathcal{Q}$.

O par $\langle x, C_x\rangle$, ou seja, 'um indivíduo e o estado no qual ele se encontra' reflete de maneira acurada o conceito de 'agregado' de H. Weyl, mostrado por ele ser de fundamental importância não só em física, mas em química e em biologia [125, Ap. B].

Estabelecidas as definições e notações acima, podemos introduzir uma tradução da linguagem de $\mathfrak{Q}$ para a linguagem de ZFC. Para tanto, admitimos que A é uma fórmula de $\mathfrak{Q}$ e chamaremos de A' a sua tradução para a linguagem de ZFC. Então, supondo que $x, y, \ldots$ representam variáveis individuais tanto em $\mathfrak{Q}$ quanto em ZFC e que todos quantificadores das fórmulas de ZFC estão restritos a $\mathcal{Q}$, temos:

Definição 3.2.0.8

1. *Se A é $m(x)$, então A' é $x \in \widehat{m}$.*
2. *Se A é $M(x)$, então A' é $x \in M$*

[10] Podemos dizer que os *ranks* de x e de y (como conjuntos de ZFC) são menores do que o *rank* mínimo dos elementos de $\mathcal{Q}$.

3. *Se A é $Z(x)$, então A' é $x \in \mathcal{Q}^{\int} \wedge x \notin M$*

4. *Se A é $qc(x)$, então A' é $card(x)$, o cardinal do conjunto x.*

5. *Se A é $x \equiv y$, então A' é $(x \in \widehat{m} \wedge y \in \widehat{m} \wedge x \sim y) \vee x = y)$*

6. *Se A é $x \in y$, então A' é $x \in y$*

7. *Cláusulas usuais para as demais fórmulas.*

A interpretação dada pela definição acima faz com que certas entidades introduzidas por definição em $\mathfrak{Q}$ adquiram características peculiares. Mencionaremos algumas delas a título de exemplo.

Um quase-conjunto é, em ZF,C um elemento da superestrutura $\mathcal{Q}$ que não é um elemento do conjunto básico X. A igualdade extensional $x =_E y$ dirá agora que x e y são entidades de $\mathcal{Q}$ que têm os mesmos elementos (no caso de serem quase-conjuntos) e, nesse caso, são o mesmo conjunto de ZFC por força do axioma da extensionalidade, ou então são elementos idênticos de M. Um 'objeto clássico', isto é, um x que satisfaz o predicado C (Def. 1.1;3) é um elemento da superestrutura $\mathcal{Q}^{\int}$.

Os axiomas de $\mathfrak{Q}$ podem então ser traduzidos para a linguagem de ZFC, e tais traduções provadas serem teoremas desta teoria.[11]

Em $\mathfrak{Q}$, os axiomas da indistinguibilidade **(Q1)**–**(Q3)** estabelecem que $\equiv$ tem as propriedades de uma relação de equivalência. Considerando a definição acima, vê-se facilmente que o conjunto ZFC cujos elementos são os conjuntos que a tradução associa aos pares da forma $\langle x, y \rangle$ tais que $x \equiv y$ define uma relação de equivalência em ZFC. É imediato verificar que para tais entidades vale a sustitutividade.

Consideremos agora os axiomas **(Q5)**–**(Q9)** e suas traduções informais. **(Q5)** é $\forall_Q x(\neg(m(x) \wedge M(x))$. Sua tradução diz simplesmente que x é um elemento da classe $\mathcal{Q}$ mas não um elemento de $\widehat{m}$ ou de M. A prova de que isso vale em ZFC é uma consequência imediata da tradução dada acima. **(Q6)** estabelece que $\forall x \forall y(x \in y \to Q(y))$; uma vez que $Q(x)$ significa agora que x é um conjunto da superestrutura $\mathcal{Q}$ mas não é elemento de $\widehat{m}$ nem de M, então a tradução de **(Q6)** diz que se y não é vazio, então (dito informalmente) $rank(y) \geq rank(X)$, e isso está de acordo com a tradução da definição de quase-conjunto . O axioma **(Q7)** é $\forall x(Z(x) \to Q(x))$, isto é, todo conjunto é um quase-conjunto . As traduções das fórmulas $Z(x)$ e $Q(x)$ dizem respectivamente que x é elemento de $\mathcal{Q}^{\int}$ ou de $\mathcal{Q}$, mas não é elemento de $\widehat{m}$ ou de M, e então, posto que todo elemento de $\mathcal{Q}^{\int}$ é também elemento de $\mathcal{Q}$, a tradução do axioma de fato se verifica.

(Q8) estabelece que conjuntos não têm m-átomos como elementos. Da tradução de 'conjunto' como elemento de $\mathcal{Q}^{\int}$, de imediato de deriva que nenhum conjunto tem elementos de $\widehat{m}$ como elementos. Quanto ao axioma **(Q9)**, ou seja, $\forall_Q x(\forall y(y \in x \to D(y)) \to Z(x))$, informalmente, todo quase-conjunto cujos elementos são conjuntos é também um conjunto, facilmente se verifica que

[11] Para alguns detalhes com relação aos axiomas de S^{**} ver também [31].

a tradução que se obtém é uma sentença derivável em ZFC; todo conjunto de $\mathcal{Q}$ que não tenha elementos obtidos a partir de conjuntos formados a partir de $\widehat{m}$ pertecem a $\mathcal{Q}^f$. A tradução de **(Q10)**, ou seja , de $\forall x(m(x) \wedge x \equiv y \to m(y))$, diz que somente elementos de $\widehat{m}$ podem estar relacionados por $\sim$ com elementos de $\widehat{m}$. Isso é mera consequência da definição de $\sim$.

Os axiomas **(Q11)**–**(Q18)**, com exceção do **(Q12)**, são adaptações de axiomas de ZFC, de sorte que não é difícil verificar que suas traduções são deriváveis nesta teoria. A tradução de **(Q12)** também resulta verdadeira a partir da tradução dada acima. O mesmo acontece com os axiomas relativos a quase-cardinais, posto que eles simplesmente estabelecem propriedades de cardinais deriváveis em ZFC. Os axiomas da substituição e da escolha também não oferecem problemas, requerendo apenas uma boa dose de paciência verificar que suas traduções são teoremas de ZFC. Resta o axioma da extensionalidade fraca.

Quanto a **(Q26)**, basta verificar que se os conjuntos têm 'a mesma quantidade' de elementos indistinguíveis, terão a mesma quantidade de elementos idênticos; estando entre sí na relação $\sim$ ou sendo o mesmo conjunto estrito senso (no sentido de ZFC). Em qualquer caso, é imediato que a fórmula que se obtem da tradução do referido axioma é um teorema de ZFC.

A prova esboçada acima sem dúvida é apenas esquemática, mas poderia ser feita com todos os detalhes, que no entanto não caberiam acrescentar aqui em função do que se expôs. O resultado, no entanto, se afigura importante, posto que garante que uma contradição poderá ser derivada em $\mathfrak{Q}$ se e somente se for possível derivar uma contradição em ZFC.

Capítulo 4

Aplicações da teoria $\mathfrak{Q}$

> Microphysics is a world of intensions.
> M. L. Dalla Chiara e G. Toraldo di Francia (1993)

4.1 Intensões Vs. Extensões no contexto de $\mathfrak{Q}$

Questões como as apontadas nos Capítulos anteriores acerca do fato dos *quanta* não poderem em geral ser individualizados, nomeados, colocados em alguma ordem, etc., faz com que coleções dessas entidades tenham propriedades distintas das dos *conjuntos* clássicos. Em especial, a semântica das linguagens da microfísica, se feita no sentido usual, torna-se bastante problemática, uma vez que a linguagem passará (eventuamente) a conter constantes que não denotam (ou denotam ambiguamente) e predicados aos quais não se pode associar um conjunto bem definido, que seria precisamente o conjunto daquelas entidades que satisfariam o predicado em questão. Em suma, o significado usual dos termos *intensão* e *extensão* já não se mantém em tal situação como no caso clássico. Com efeito, observe-se inicialmente que uma das peculiaridades da semântica padrão da lógica clássica é de que, por exemplo sendo P um predicado unário e a uma constante individual, o valor-verdade (extensão) da sentença atômica $P(a)$ é função das extensões de cada uma de suas partes, de sorte que $P(a)$ será verdadeira se e somente se o elemento do domínio denotado por a pertence ao subconjunto do domínio associado a P. Em síntese, é preciso especificar a denotação de a e a extensão do predicado P [32]. Isso já não se mantém no âmbito de uma lógica que almeje captar o que se dá no contexto da mecânica quântica, posto que, se o domínio fosse constituído por partículas indistinguíveis, como se poderia especificar o *denotatum* de a ?[1]

[1] Para maiores detalhes sobre essas dificuldades, pode-se consultar [32, 34, 118, 37, 88], além do nosso [30].

Do mesmo modo, um predicado que expresse uma certa propriedade de microobjetos pode não ter uma extensão bem definida. Por exemplo, consideremos uma coleção de elétrons e imaginemos que desejamos verificar quantos elétrons de tal coleção há com spin up na direção OX. Então podemos considerar o seguinte predicado P:

$P(x) \Leftrightarrow x$ é um elétron (da coleção) com spin up medido na direção OX.

Como de sabe, esse predicado não especifica uma coleção bem definida, posto que depende da medida realizada; com efeito, uma vez obtida uma coleção de elétrons com spin up, uma nova medida da propriedade em questão conduziria a uma coleção de elétrons a qual não se pode afirmar que coincide com a anterior, podendo eventualmente ser uma coleção completamente distinta da primeira. Em suma, a extensão do predicado P não é bem definida. Em resumo, uma constante individual, que na semantica tarskiana usual deveria nomear um indivíduo bem definido do universo do discurso, não poderia fazê-lo de maneira não ambígua se esse domínio fosse composto de entidades indistinguíveis, e similarmente a extensão de determinados predicados, que classicamente deveriam ser subconjuntos do domínio, precisamente os conjuntos dos objetos (do domínio) que caem sob o conceito expresso pelo predicado em questão, também não poderiam ser especificados de modo não ambíguo.

O caso mencionado é apenas um pequeno exemplo da problemática trazida pela questão da indistinguibilidade de partículas elementares para o contexto da fundamentação semântica das linguagens da microfísica.[2] Esses motivos, dentre outros, sugerem que é relevante analisar aspectos matemáticos dessa distinção fundamental para com o caso clássico. M. L. Dalla Chiara e G. Toraldo di Francia levaram um tal tipo de análise ao campo da lógica quântica, mas não nos deteremos nos seus trabalhos aqui. Desejamos enfatizar outros aspectos, mais voltados com a fundamentação matemática das teorias de quase-conjuntos, as quais surgem no contexto de tais discussões.

Como disse S. Feferman, "a intensionalidade em matemática tem a ver com *como os objetos matemáticos nos são apresentados*" [45]. Em outras palavras, importa menos a característica *ôntica* dos objetos e mais aquelas que de algum modo os especifiquem. Essa visão é perfeitamente consoante com a física quântica, como vimos no Capítulo 1. Tais propriedades são em essência o modo pelo qual as entidades nos são dadas, para usarmos as palavras de Feferman, e são tudo o que temos. Deste modo, não há nada para além das propriedades, das leis físicas. Não se pode 'olhar' para um elétron e verificar quais são suas características, como se faz com um objeto macroscópico. Essas leis são postuladas pela teoria, que de certo modo precede a observação,[3] como que *constituindo* as entidades como (no caso) elétrons; 'elétrons' são em suma uma determinada conjunção de leis físicas. A noção de que há um 'objeto' que possui essas propriedades parece ser completamente dialetizada pela física quântica.[4]

[2]Com relação ao uso de nomes em geral, assim como um tratamento das descrições (expressões da forma $\iota x A(x)$, sendo ι o descritor) no contexto da lógica quântica, ver [32].

[3]"It is the theory which decides what we can observe", teria dito Einstein [62].

[4]Essa atitude, de certo modo anti-realista, certamente será contestada pelos físicos desta

Repare-se mais uma vez a dificuldade que há em se usar a linguagem usual para nos referirmos a entidades não convencionais; não escapamos a usar expressões como 'indivíduo', 'entidades', 'partículas', etc.. Esse ponto sutil pode suscitar acirradas discussões filosóficas, as quais sem dúvida motivariam o desenvolvimento de aspectos lógicos, mas que, apesar de interessantes e extremamente relevantes, fogem ao escopo dessa tese. Apenas para mencionar, lembramos W. Heisenberg quando diz que a antiga questão de se saber se é possível dividir a matéria *ad infinitum* simplesmente não se coloca no contexto da física atual. Para ele, essa questão simplesmente não faz sentido [59]. Do mesmo modo, a experiência de pensamento mencionada acima é obviamente apenas uma idealização; de fato não haveria sentido tentar despir um tal objeto de suas propriedades. A mecânica quântica elaborou um conceito como o de elétron a partir de certas propriedades, descritas por leis físicas como as acima, e é com elas que devemos tratar. A questão de se há ou não uma entidade na realidade que as satisfaça e somente a elas não é um problema lógico.

Com efeito, como vimos no Capítulo 1, partículas elementares são destituídas de 'substratum' ou 'primitive thisness', e tudo o que nos resta são suas por assim dizer 'intensões'. Essa questão é bastante sutil, uma vez que está imbrincada também com a discussão acerca do que vemos, por exemplo numa câmara de Wilson, se um elétron é tão somente uma coleção de propriedades. De certo modo, talvez o que vejamos seja tão somente uma 'manifestação macroscópica' de algo que não podemos especificar precisamente, e tudo leva a crer que esse 'algo' não seja individualizável.[5] É interessante uma opinião de Brouwer que muito bem se encaixa nessa discussão. Disse ele que "The physicist concerns himself with the projections of the phenomena on his measuring instruments, all constructed by a similar process from rather similar solid bodies. It is therefore not surprising that the phenomena are forced to record in this medium either similar 'laws' or 'no laws'. For example, the laws of astronomy are no more than the laws of our measuring instruments when used to follow the course of heavenly bodies."[6] Tais entidades são *nomológicas*, como vimos no Capítulo 1 [118, 37].

Evidentemente, uma abordagem a domínios compostos por entidades que

---

linha, mas seus argumentos a favor de um realismo certamente podem ser também criticados. Com efeito, se há determinadas entidades que são meramente *descritas* por tais leis, podemos ao menos idealmente fazer uma 'experiência de pensamento' e 'despir' tal entidade de seus atributos, restando o que a literatura filosófica chama de *bare particular* [113, Cap. 2]. No entanto, o que se constata de toda a discussão levada a cabo anteriormente no Capítulo 1, é que não há tais entidades na física atual: não há bare particulars. Logo, tudo o que nos resta é um tipo de entidade que é um 'indivíduo' apenas enquanto objeto de referência em geral, não podendo ser especificado; *a la* Russell, ele é a soma de suas qualidades. Não há 'substratum', não há *quid*. Voltaremos a este tópico no Capítulo 4.

[5]As experiências recentes de que cientistas teriam podido 'aprisionar' um elétron, confinando-o a uma certa região, viria a corroborar os teoremas das teorias de quase-conjuntos, posto que, se um tal elétron fosse substituído por 'outro' no decorrer da noite, enquanto o cientista não está observando (ou então, se a experiência fosse realizada uma outra vez), nada mudaria das conclusões que ele tiraria no dia seguinte acerca do fenômento.

[6]Citado em [106, p. 184]. Agradecemos ao Prof. Newton C. A. da Costa por nos chamar a atenção para a frase de Brouwer.

tenham essa característica, ou seja, onde tudo o que há são as maneiras de se especificar as entidades, aparentemente deverá ser intensional.[7], como vimos anteriormente.

Sem nos alongarmos mais na discussão, que poderia ser longa e bastante técnica, chegamos finalmente à seguinte questão: que aspectos do problema da intensionalidade no contexto da física quântica desejamos tratar nesta tese? A resposta é bastante modesta. O que faremos é primeiramente mostrar de que modo a teoria intensional QST de Dalla Chiara e Toraldo di Francia [37] pode ser interpretada em $\mathfrak{Q}$. Anteriormente, em [40], havíamos achado que a 'redução' havia sido feita para a teoria S^{**}, mas alguns argumentos posteriores de Dalla Chiara, feitos em comunicação pessoal, colocaram dúvidas no modo pelo qual a reação de identidade de QST poderia ser interpretada em S^{**}(a teoria de quase-conjuntos apresentada em [40]). Aqui, mostramos que QST pode ser interpretada em $\mathfrak{Q}$. Posteriormente, mostramos de que modo a teoria $\mathfrak{Q}$pode ser usada como arcabouço matemático 'natural' para se estabelecer a semântica de certas lógicas que considerem a distinção entre a extensão e a intensão de conceitos.[8]

Consequentemente, a primeira empreitada mostra que todas as discussões levadas a cabo pelos autores italianos relativamente à semântica das linguagen da microfísica, podem ser reproduzidas em $\mathfrak{Q}$. Ademais, como $\mathfrak{Q}$é uma teoria na qual o conceito de identidade carece de sentido para os m-átomos, talvez esta teoria reflita com mais acuidade as intuições de Schrödinger já ventiladas. Os resultados apresentados no Capítulo 2 (Teorema 4) acerca da 'não-observabilidade' de permutações, dentre outros fatores, parecem corroborar a idéia de que $\mathfrak{Q}$é de fato mais adequada para nela se tentar fundamentarr a mecânica quântica. Voltaremos a este ponto no Capítulo final.

4.1.1 'Quasets' no âmbito de $\mathfrak{Q}$

Nesta seção, mostraremos que a teoria QST de Dalla Chiara e Toraldo di Francia pode ser interpretada em $\mathfrak{Q}$. As entidades básicas de QST são denominadas *quasets*; manteremos essa terminologia, e veremos de que modo os quasets podem ser vistos como quase-conjuntos particulares.

Importante observar que, no que se segue, $\neg(x \in y)$, que escreveremos simplesmente $\neg x \in y$, *não é* equivalente a $x \notin y$, conforme já alertado no Capítulo 2.

A linguagem da teoria QST, além dos símbolos lógicos usuais, tem os seguintes símbolos específicos: $\subseteq$ (inclusão entre quasets); $\in$, lido 'certamente pertence', $\notin$, lido 'certamente não pertence', $card^*$, que é um símbolo funcional unário

[7] Não discutiremos aqui o 'método extensional' de Carnap segundo a qual toda declaração não extensional (portanto as intensionais) podem ser traduzidas em uma equivalente que seja extensional [11]. No nosso caso, talvez essa tese de Carnap seja refletida pela possibilidade da tradução que demos no capítulo precedente da linguagem de $\mathfrak{Q}$na linguagem extensional de ZFC. Em todo caso, como vimos, mesmo nessa possibilidade não se pode manter de modo adequado a idéia intuitiva de entidades não individualizáveis.

[8] Sobre este tópico, basear-nos-emos em nosso [30], mas aqui usando $\mathfrak{Q}$ao invés de S^{**}.

que representará o cardinal de um quaset, e $\cap_*$, a interseção entre quasets. Usaremos x, y, z, w, t para denotar variáveis individuais. Os conceitos de termo, fórmula, etc. são aqueles padrão. A lógica subjacente a QST é o cálculo clássico de predicados de primeira ordem com igualdade.

Os axiomas serão mencionados abaixo, na medida em que formos mostrando que adequadas traduções deles são teoremas de $\mathfrak{Q}$. No momento, cabe recordar aqui um dos mais peculiares axiomas de QST (axioma 4):

$$\forall x \exists ! y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \rightarrow \neg(z \in x)))$$

no qual $\exists !$, definido como de hábito, significa 'há somente um'.

Em QST, este axioma justifica a introdução da *extensão* de um quaset:

$$\forall x \forall y (y = Ext(x) \leftrightarrow \forall z ((z \in y \leftrightarrow z \in x) \wedge (z \notin y \rightarrow \neg(z \in x)))$$

Os *conjuntos* (entidade que satisfazem um predicado S) são definidos em QST como aqueles quasets que coincidem com suas extensões: $\forall x(S(x) \leftrightarrow x = Ext(x))$, por definição. Para conjuntos, vale o axioma da extensionalidade usual. Postula-se ainda que há um quaset ao qual nenhum quaset pertence (a teoria não admite átomos), o qual resulta ser um conjunto e é único. Outro axioma diz que aquelas fórmulas que, quando relativizadas a conjuntos, são axiomas de ZF (os autores não mencionam o axioma da escolha, mas é evidente que este axioma poderia ser adicionado a QST) tornam-se axiomas de ZF, são também axiomas de QST. Isso faz com que ZF possa ser relativamente interpretada em QST. Ademais, há ainda os axiomas para os conceitos de cardinal de um quaset e para a interseção de quasets, os quais comentaremos abaixo.

Em QST, a relação de igualdade satisfaz a substitutividade e o axioma da extensionalidade não vale para quasets em geral. A idéia fundamental de QST é a distinção entre quasets e suas extensões, a qual procura refletir o desejo de se exprimir o fato de não se poder saber 'exatamente' quais elementos pertencem a um quaset; apenas a quantidade deles é conhecida, o que é postulado por um dos axiomas envolvendo o conceito de cardinal (a formulação é similar ao axioma **(Q19)** de $\mathfrak{Q}$).

Afim de introduzir os conceitos típicos de QST em $\mathfrak{Q}$, daremos (em $\mathfrak{Q}$) algumas definições:

Definição 4.1.1.1 *Dizemos que w* **certamente não pertence** *a um quase-conjunto x, em símbolos $w \notin x$ see $\forall y(y \in x \rightarrow \neg(w \equiv y))$.*

Equivalentemente, $w \notin x$ see $\neg \exists y(y \in x \wedge w \equiv y)$. Resulta que $\neg w \notin x \leftrightarrow \exists y(y \in x \wedge y \equiv w)$. Deve-se lembrar que essa convenção foi feita em $\mathfrak{Q}$ justamente para podermos introduzir a Definição acima nos moldes de QST.

Intuitivamente, se em um quase-conjunto x há um elemento y o qual 'certamente' pertence a x, isto é, tal que $y \in x$, e de tal sorte que $y \equiv w$, então não podemos asseverar que w não pertence a x.

A definição seguinte introduz em $\mathfrak{Q}$um quase-conjunto particular, o qual representará (em $\mathfrak{Q}$) os quasets de QST:

Definição 4.1.1.2 *Se x e z são quase-conjuntos então a* **hazy** *de x relativa a z é definida como sendo o conjunto $Hz_z(x)$ tal que:*

$$Hz_z(x) := [y \in z : \neg y \notin x]$$

Em outras palavras, a *hazy* de x (relativa a z) é o quase-conjunto dos elementos de z para os quais não se pode afirmar que eles certamente não pertencem a x. Intuitivamente, se desejarmos, podemos pensar que a *hazy* de x representa a coleção dos objetos (de z) que *podem* estar em x; são os 'elementos prováveis', ou os 'elementos potenciais' de x.

Quando não houver possibilidade de confusão, omitiremos a menção ao quase-conjunto z, falando simplesmente da *hazy* de x, escrevendo $Hz(x)$.

É imediata a demonstração do seguinte resultado:

Teorema 4.1.1.1

1. $\forall_Q x \forall_Q z (Hz_z(x) =_E \bigcup_{t \in x}[t] \cap z)$
2. $Hz_z(\emptyset) =_E \emptyset$ *e* $Hz_\emptyset(x) = \emptyset$
3. $\overline{x} =_E \emptyset \to Hz(x) =_E x$. *Em particular,* $Z(x) \to Hz(x) =_E x$

A idéia da *hazy* de um quase-conjunto x suscita algumas questões interessantes. Com efeito, a *hazy* de x é como que uma 'nuvem' de elementos que circundam x, dos quais não se pode dizer que eles não pertencem a x, uma vez que x contém ao menos um elemento que é indistinguível de cada um dos elementos da sua *hazy* (sempre relativa a um dado quase-conjunto). Afim de enfatizarmos este ponto, introduzimos o conceito de *extensão* de um quase-conjunto x como sendo o quase-conjunto dos elementos que ('realmente') pertencem a x (a definição é similar àquela de QST):

Definição 4.1.1.3 *Sendo x um quase-conjunto, dizemos que um quase-conjunto y é a* **extensão** *de x se* $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \wedge (z \notin y \to \neg z \in x)$

A extensão de x será denotada $Ext(x)$. A existência desse quase-conjunto é assegurada pelos axiomas de $\mathfrak{Q}$uma vez que, em $\mathfrak{Q}$, como a pertinência tem o seu significado clássico, para todo quase-conjunto x, $x =_E Ext(x)$. No entanto, $x \subset Hz(x)$, e este é o motivo pelo qual a definição foi introduzida, como se verá abaixo.

A idéia de *hazy* de um quase-conjunto faz pensar que há alguma relação com conjuntos *fuzzy*. Ainda não investigamos essa possibilidade, mas mencionamos a seguinte característica distintiva entre quase-conjuntos e conjuntos *fuzzy*, a qual obviamente não descarta uma possível interconexão.

Num conjunto *fuzzy*, como se sabe, a característica essencial, segundo a formulação original de Zadeh [127], é que haja um 'grau de pertinência' de um elemento a um conjunto. Há elementos que 'certamente pertencem' ao conjunto, há os que 'certamente não pertencem' ao conjunto e há aqueles que têm por assim dizer um 'grau intermediário' de pertinência. Intuitivamente, o que se passa é que um conjunto *fuzzy* não tem uma fronteira bem definida, de sorte que, para certos elementos, sabe-se apenas de sua pertinência ao conjunto com um certo grau, advindo daí a característica 'nebulosa' de tais coleções. Nos quase-conjuntos ao contrário, há uma tal 'fronteira' bem definida, havendo elementos que pertencem ao quase-conjunto e elementos que a ele não pertencem.[9] Mas, como o Teorema 5 do Capítulo 2 mostrou, se um elemento que pertença ao quase-conjunto é 'permutado' (no sentido do referido teorema) por um que lhe seja indistinguível, tudo se passa como se nada tivesse acontecido; o quase-conjunto resultante é indistinguível do anterior, em virtude do axioma **(Q26)**. Em outras palavras, em $\mathfrak{Q}$não há característica nebulosa com os quase-conjuntos (mas talvez com suas *hazy* , o que ainda está por ser investigado), mas um caráter de 'realidade velada', que talvez venha a ter analogias com a posição de B. d'Espagnat [43].[10] Deste modo, um quase-conjunto pode ser visto como uma coleção de objetos que está encoberta por um 'véu'. A identidade de certos de seus elementos (os m-átomos) não pode ser conhecida, de sorte que uma 'troca' conveniente entre eles (no sentido do Teorema 4 do Capítulo 2) nada altera essencialmente. Até onde nos é dado conhecer, este ponto é mais próximo do que acontece num átomo, por exemplo, ou talvez com a matéria em geral, do que poderia ser uma sua característica 'nebulosa'. Com efeito, num átomo de sódio, para repetir um exemplo já explorado antes, *sabe-se* que há elétrons em torno de seu núcleo, de sorte que não há uma fronteira indefinida, com uns 'dentro', outros 'fora' e outros ainda 'mais ou menos'.[11] O que se passa é que a fronteira entre o que está fora e o que está dentro é (de certo modo) bem definida, mas se fosse possível trocar um elétron por outro, nada mudaria: não 'perceberíamos' a mudança efetuada por detrás do véu. Esse ponto, típico da física quântica, é descrito por R. Penrose em seu livro 'A mente nova do rei'. Disse ele que "according to the modern theory [mecânica quântica], if a particle of a person's body were exchanged with a similar particle in one of the bricks of his house then nothing would have happened at all" [91, p. 360].

Estudar algo como que uma 'topologia' dos *hazy* poderia ser interessante de ser investigado, procurando conectá-los com os conjuntos *fuzzy*, mas isso também está fora dos objetivos desta tese. No entanto, vide o Capítulo final.

Centremos nossa atenção nos axiomas de QST tal como formulados em $\mathfrak{Q}$. Intuitivamente, associaremos a cada quaset de QST um quase-conjunto y que seja a *hazy* de um certo quase-conjunto x. Disso resulta, como se verifica de imediato a partir da definição da extensão de um quaset (em QST) mencionada acima, que $Ext(y) =_E x$, ou seja, a extensão da *hazy* de x é precisamente x.

Deste modo, seja x um quaset em $\mathfrak{Q}$, ou seja, $x =_E Hz(y)$ para algum

[9] Ver a discussão sobre predicados opacos no Capítulo 4.

[10] Interessante ensaio sobre essa obra de d'Espagnat é [4]. Nessas circunstâncias, poderíamos chamar certos quase-conjuntos de *veiled sets*.

[11] O uso de conjuntos *fuzzy* em mecânica quântica tem sido destacado por Dalla Chiara em trabalhos recentes, dos quais desconhecemos os detalhes. Mas parece que a característica 'nebulosa' está mais próxima do que apregoa a mecânica quântica relativística, na qual mesmo a cardinalidade de uma coleção de partículas é variável. Ver [40]. Abordagem alternativa poderia ser a de se explorar o conceito acima de *hazy* de um qset.

quase-conjunto y. Então resulta que $Ext(x)$ é um subquase-conjunto próprio de x, como requer QST. Isso faz a requerida distinção (de QST) entre um quaset e sua extensão. Ademais, pelos axiomas de quase-cardinais, não é difícil provar que se $y_1 \equiv y_2$, então $Hz(y_1) \equiv Hz(y_2)$.[12] Logo, interpretando a igualdade de QST na relação de indistinguibilidade de $\mathfrak{Q}$, resulta que para quasets (*hazys*) indistinguíveis, vale a substitutividade (axioma ($\equiv_4$)).[13]

Para finalizar, basta verificar que as traduções dos axiomas de QST, levadas a cabo tendo-se em vista as interpretações e definicões precedentes e dadas abaixo, são teoremas de $\mathfrak{Q}$. O axioma A1 de QST assevera que $\subseteq$ é uma ordem parcial. Se interpretarmos esse símbolo na inclusão de $\mathfrak{Q}$, este resultado é alcançado de modo imediato.

O segundo axioma de QST, traduzido na linguagem de $\mathfrak{Q}$, é a expressão do seguinte teorema, que provamos em $\mathfrak{Q}$:

Teorema 4.1.1.2 $\forall_Q x \forall w(w \in x \rightarrow \neg w \notin x)$

Proof: Admita que $w \in x$. Então, como $\equiv$ é reflexiva, existe $y \in x$ tal que $y \equiv w$, a saber, o próprio w.

A recíproca do teorema anterior, no entanto, não vale em geral. Com efeito, admita que x é um quase-conjunto e que $w \in x$. Então $\exists y(y \in x \wedge y \equiv w)$, a saber, o próprio w uma vez que $\equiv$ é reflexiva. No entanto, se w é um m-átomo, o fato de haver em x um y indistinguível de w não implica que y seja exatamente w, afirmativa que, aliás, carece de sentido em $\mathfrak{Q}$em se tratando de m-átomos. A recíproca do teorema anterior só vale se w não for um m-átomo:

Teorema 4.1.1.3 *Para todos x e w, tem-se que* $\neg m(w) \rightarrow (w \notin x \leftrightarrow \neg w \in x)$

Proof: Se $w \notin x$, então $\neg \exists y(y \in x \wedge w \equiv y)$ pela definição acima. Mas, se w não é um m-átomo, então o símbolo de indistinguibilidade pode ser substituído pela igualdade extensional, uma vez que já mostramos que indistinguíveis de M-átomos (respec., quase-conjuntos) são M-átomos (respect., quase-conjuntos). Portanto, esta última expressão torna-se $\neg \exists y(y \in x \wedge w =_E y)$, ou seja, w não pertence a x, logo, $\neg w \in x$.

De modo similar, podemos provar que se w não é um m-átomo, então $\neg w \in x \leftrightarrow w \in x)$.

Teorema 4.1.1.4 *As traduções dos axiomas de QST (no sentido explicado acima) são teoremas de $\mathfrak{Q}$.*

[12] Este resultado segue-se do ítem 1 do teorema precedente e dos axiomas para quase-cardinais.

[13] Isso contorna as objeções de Dalla Chiara. Suas dúvidas (muito pertinentes) diziam respeito à teoria S^{**}. Nesse caso, a substitutividade era postulada apenas para quase-conjuntos extensionalmente idênticos, e portanto, desde que um candidato natural para interpretar a igualdade de QST era a identidade extensional, visando fazer com que ela obedecesse a substitutividade, resultava que também satisfaria o axioma usual da extensionalidade, o que não ocorre em QST. Não havia portanto em S^{**}um 'candidato natural' para desempenhar o papel da igualdade de QST. Usando-se $\mathfrak{Q}$, no entanto, essas objeções são contornadas.

Proof: Uma vez que já mostramos que as traduções dos axiomas A1, A2 e A4 de QST podem ser provadas como teoremas de $\mathfrak{Q}$, basta verificar que o mesmo se dá com os demais axiomas. Com efeito, A3 resulta, em $\mathfrak{Q}$, na seguintes sentença:

$$\forall_Q x \forall_Q y (x \subseteq y \rightarrow (\forall z (z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (z \notin y \rightarrow z \notin x)))$$

O primeiro elemento da conjunção do segundo membro resulta de imediato da definição de $\subseteq$. Portanto, necessitamos provar somente que $x \subseteq y$ implica $\forall z (z \notin y \rightarrow z \notin x)$. Suponha que $\neg z \notin x$; então $\exists w (w \in x \wedge w = z)$. Mas, desde que $x \subseteq y$ por hipótese, vem que $w \in y$. portanto, $\exists w (w \in y \wedge w = z)$, logo $\neg z \notin y$. O axioma A5 diz que há um quaset vazio, ao qual nenhum quaset pertence. Como $\emptyset =_E Hz_z(\emptyset)$ para todo quase-conjunto z, resulta que o quase-conjunto vazio satisfaz esse resquisito. Os axiomas restantes de QST são os seguintes: A6 diz que todas as instancias de axiomas de ZF são axiomas de QST. Isso se dá também em $\mathfrak{Q}$, como vimos no Capítulo 2. O axioma A7 tem formulação similar ao nosso axioma **(Q19)**; o mesmo se verifica com os demais axiomas de QST, como é fácil de se perceber..

Dentre outra coisas, os resultados acima mostram que $\mathfrak{Q}$ é 'mais forte' que as teorias de quase-conjuntos apresentadas anteriormente.

4.2 Semântica para algumas lógicas intensionais

Em [30], investigamos uma classe de lógicas intensionais, denominadas 'lógicas de Schrödinger (intensionais)',[14] mostrando de que modo pode-se fundamentar uma semântica para tais lógicas no escopo de S^{**}. Nesta seção, veremos que podemos usar $\mathfrak{Q}$para fundamentar tal semântica, e com isso objetivamos não só exibir mais alguns fatos relativos à semântica das linguagens da microfísica como também acrescentar mais detalhes às questões ventiladas no trabalho mencionado. Em especial, veremos que, com o uso de $\mathfrak{Q}$, podemos expressar de modo satisfatório o fato de que certas constantes da linguagem não têm denotação bem definida, assim como determinados predicados não definem de modo não ambíguo uma coleção de objetos que possa ser dita ser sua extensão, como já sugerido anteriormente.

Inicialmente, chamamos de Π o conjunto dos **tipos**, definido recursivamente como se segue: (1) $e_1, e_2 \in \Pi$, (2) se $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \Pi$, então $\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in \Pi$ e (3) os únicos tipos são os dados pelos ítens (1) e (2) acima. Intuitivamente, e_1 e e_2 são os tipos dos *indivíduos*; os objetos de tipo e_1 podem ser pensados como objetos da microfísica (partículas elementares), enquanto que os de tipo e_2 são os objetos macroscópicos usuais. Para estes, admitiremos que a lógica clássica (teoria simples dos tipos) valha em toda a sua amplidão. Para os de tipo e_1, como anteriormente, admitiremos que o conceito de identidade não se aplica.

A lógica $S_\omega \mathcal{I}$ é uma lógica de ordem ω que incorpora modalidades. Sua linguagem contém os conectivos lógicos usuais (suporemos que $\neg$ e $\rightarrow$ são primitivos), o símbolo de igualdade, símbolos auxiliares e quantificador universal (o

[14]Tais sistemas são uma variante daquele apresentado em [69, 29].

quantificador existencial é definido como usual). Ademais, consideramos o operador de necessidade $\Box$. Com relação a variáveis e constantes, para cada tipo $\tau \in \Pi$ admitimos uma coleção $X_1^\tau, X_2^\tau, \ldots$ de variáveis de tipo τ e um conjunto qualquer $A_1^\tau, A_2^\tau, \ldots$ de constantes de tipo τ. Usamos X^τ, Y^τ e C^τ, D^τ, eventualmente com subíndices, como variáveis sintáticas para variáveis e constantes de tipo τ respectivamente.

São *termos de tipo* τ as variáveis e as constantes deste tipo; deste modo, temos termos individuais de tipos e_1 e e_2. Usaremos U^τ, V^τ, eventualmente com subíndices para denotar termos de tipo τ. Fórmulas atômicas são definidas de modo usual: se U^τ é um termo de tipo $\tau = \langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$ e $U^{\tau_1}, \ldots, U^{\tau_n}$ são termos de tipos $\tau_1, \ldots, \tau_n$ respectivamente, então $U^\tau(U^{\tau_1}, \ldots, U^{\tau_n})$ é uma fórmula atômica. Do mesmo modo, $U^\tau = V^\tau$ é uma fórmula atômica desde que τ seja diferente de e_1.[15] Consequentemente, a linguagem de $S_\omega\mathcal{I}$ não nos permite falar nem da identidade e nem da diversidade de termos de tipo e_1. As demais fórmulas são definidas de modo usual, por exemplo como em [61].

4.2.1 A lógica $S_\omega\mathcal{I}$

Tendo-se em vista o que foi dito acima, podemos mencionar os postulados de $S_\omega\mathcal{I}$:

- **(S1)** A, se A origina-se de uma tautologia em $\neg$ e $\rightarrow$ mediante substituição uniforme de suas variáveis por fórmulas de $S_\omega\mathcal{I}$.
- **(S2)** $\forall X^\tau(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall X^\tau B)$, desde que X não ocorra livre em A.
- **(S3)** $\forall X^\tau A(X^\tau) \rightarrow A(U^\tau)$ se U^τ é um termo livre para X^τ em $A(X^\tau)$ e é do mesmo tipo que X^τ.
- **(S4)** $X^{e_2} = X^{e_2}$
- **(S5)** $X^{e_2} = Y^{e_2} \rightarrow \Box(X^{e_2} = Y^{e_2})$
- **(S6)** $\Box(U^\tau = V^\tau) \rightarrow (A(U^\tau) \rightarrow A(V^\tau))$, na qual U^τ e V^τ são livres para X^τ em $A(X^\tau)$.
- **(S7)** $\Box A \rightarrow A$
- **(S8)** $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
- **(S9)** $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
- **(R1)** De A e $A \rightarrow B$, infere-se B
- **(R2)** De A infere-se $\forall X^\tau A$
- **(R3)** De A infere-se $\Box A$

[15]A definição formal pode ser dada facilmente.

As noções sintáticas comuns são introduzidas de modo habitual; por exemplo, os conceitos de $\vdash A$, $\Gamma \vdash A$, e assim por diante. Um conjunto Σ de fórmulas de $S_\omega\mathcal{I}$ é **consistente** se e somente se há uma fórmula de $S_\omega\mathcal{I}$ que não é derivável a partir de Σ.

4.2.2 Semântica

A semântica para $S_\omega\mathcal{I}$ será fundamentada na teoria $\mathfrak{Q}$. Mostraremos agora os principais passos necessários para se provar uma um teorema de completude 'fraca' para $S_\omega\mathcal{I}$. Todas as construções abaixo são realizadas em $\mathfrak{Q}$.

Seja $D = m \cup M$, sendo $m \neq \emptyset$ um quase-conjunto puro finito e $M \neq \emptyset$ um conjunto.[16] Além disso, supomos que I é um conjunto não vazio cujos elementos são denominados de *índices* ou *estados de coisas* (*state of affairs*).[17]

Por um **frame** para $S_\omega\mathcal{I}$ baseado em D e I entendemos uma família de quase-conjuntos $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau\in\Pi}$, sendo:

1. $\mathcal{F}_{e_1} = m$
2. $\mathcal{F}_{e_2} = M$
3. Para cada $\tau = \langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle \in \Pi$, $\mathcal{F}_\tau$ é um subquase-conjunto não vazio de
$$[\mathcal{P}(\mathcal{F}_{\tau_1} \times ... \times \mathcal{F}_{\tau_n})]^I$$

Se a igualdade vale no ítem 3, dizemos que o frame é **standard**. Por um **modelo generalizado** (**g-modelo**) para $S_\omega\mathcal{I}$ baseado em D e I entendemos um par ordenado
$$\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}_\tau, \rho \rangle_{\tau\in\Pi}$$
tal que:

1. $(\mathcal{F}_\tau)_{\tau\in\Pi}$ é um frame para $S_\omega\mathcal{I}$ baseado em D e I.
2. ρ é uma q-função que atribui um elemento de $\mathcal{F}_\tau$ para cada constante C^τ.[18]

Um **modelo standard** para $S_\omega\mathcal{I}$ é um g-modelo cujo frame é standard. Alguns exemplos ilustrarão a idéia intuitiva de tal semântica. Os dois primeiros mostram que o caso intensional clássico, como apresentado por exemplo em [52], são mantidos em nossa lógica; os dois últimos exibem peculiaridades das lógicas de Schrödinger, mostrando que pode haver constantes que não denotem sem ambiguidade e predicados sem uma extensão bem definida.

[16] Os termos clássicos como 'conjunto', 'função', etc. podem ser pensados como denotando entidades similares às usuais de mesmo nome, construídas na 'parte clássica' de $\mathfrak{Q}$.

[17] Do mesmo modo que na abordagem de Montague à lógica intensional, pode-se supor que I é o produto cartesiano $W \times T$ onde W é um quase-conjunto de 'mundos possíveis' e T é um conjunto totalmente ordenado de 'instantes de tempo' [54].

[18] Em particular, $\rho(C^{e_1}) \in m$ e $\rho(C^{e_2}) \in M$.

Exemplo 4.2.2.1 Consideremos a constante C^{e_2}. Posto que $\mathcal{F}_{e_2} = M$, então $\rho(C^{e_2}) \in M$, isto é, C^{e_2} nomeia um elemento de um conjunto no sentido usual. Este fato não pode ser surpreendente, posto que uma constante de tipo e_2 age em nossa lógica como uma constante da lógica clássica.

Exemplo 4.2.2.2 Consideremos agora a constante $C^{\langle e_2 \rangle}$. Neste caso, $\mathcal{F}_{\langle e_2 \rangle} \subseteq [\mathcal{P}(\mathcal{F}_{e_2})]^I = [\mathcal{P}(M)]^I$. Então, $\mathcal{F}_{\langle e_2 \rangle}$ é uma classe de funções de I em $\mathcal{P}(M)$, como no caso clássico. Consequentemente, $\rho(C^{\langle e_2 \rangle}) \in \mathcal{F}_{\langle e_2 \rangle}$, ou seja, é uma função de I em $\mathcal{P}(M)$. Intuitivamente, $C^{\langle e_2 \rangle}$ é um predicado unário (propriedade individual) cujos argumentos são indivíduos do tipo e_2 (ou seja, indivíduos 'clássicos'). A extensão de um tal predicado é um subconjunto de M, enquanto que sua intensão é uma aplicação de I em $\mathcal{P}(M)$.

Vejamos agora dois exemplos de situações que demandam a teoria $\mathfrak{Q}$.

Exemplo 4.2.2.3 Consideremos a constante C^{e_1}. Neste caso, $\mathcal{F}_{e_1} = m$ e então $\rho(C^{e_1}) \in m$, isto é, a constante 'nomeia' um m-átomo. Posto que m é um quase-conjunto puro, seus elementos são m-átomos que não podem ser individualizados, contados, etc., a denotação C^{e_1} é ambígua. Poderíamos dizer que uma constante de tipo e_1 representa um **nome (substantivo) generalizado (g-noun)**.

Exemplo 4.2.2.4 Consideremos agora a constante $C^{\langle e_1 \rangle}$. Neste caso, $\mathcal{F}_{\langle e_1 \rangle} \subseteq [\mathcal{P}(\mathcal{F}_{e_1})]^I = [\mathcal{P}(m)]^I$. Então, $\rho(C^{\langle e_1 \rangle}) \in \mathcal{F}_{\langle e_1 \rangle}$, isto é, tal constante é uma (quase-) função de I em $\mathcal{P}(m)$. Se m é um quase-conjunto puro cujos elementos são todos indistinguíveis uns dos outros, então a função denotação não distingue entre quase-conjuntos em $\mathcal{P}(m)$. Na verdade, neste caso a única diferença entre tais quase-conjuntos é a sua quase-cardinalidade, ou seja, se $\rho(C^{\langle e_2 \rangle}) = x$, então qualquer quase-conjunto y tal que x e y sejam similares (cf. Def. 1.2, Capítulo 2) pode ser a denotação de $C^{\langle e_2 \rangle}$. Esta interpretação conforma-se com o já aludido fato de que um predicado como 'elétron' não tem uma extensão bem definida.

Esses dois últimos exemplos sugerem aquilo que já havíamos visto informalmente com relação ao nosso tratamento dos m-átomos; os termos de tipo e_1 não têm denotação precisa, referindo-se ambiguamente a elementos do domínio. Do mesmo modo, termos de tipo $\langle e_1 \rangle$, por exemplo, não especificam coleções bem definidas de objetos do domínio. Ao invés disso, definem 'relations-in-intension' do referido tipo.

O conjunto de todas as **atribuições** (*assignments*) sobre um g-modelo $\mathcal{M}$ será denotado $As(\mathcal{M})$, e consiste no conjunto de todas as q-funções f com domínio na coleção das variáveis de $S_\omega\mathcal{I}$ tais que $f(X^\tau) \in \mathcal{F}_\tau$ para toda X^τ de tipo τ. Se $f \in As(\mathcal{M})$, denotamos por $\overline{f}$ a extensão de f ao conjunto de todas as constantes de $S_\omega\mathcal{I}$, definida por $\overline{f}(C^\tau) := \rho(C^\tau) \in \mathcal{F}_\tau$.

Se $i \in I$ e $f \in As(\mathcal{M})$, define-se o conceito de

$$\mathcal{M}, i, f \ \mathsf{sat}\ A$$

por recursão sobre o comprimento da fórmula A do seguinte modo:

1. $\mathcal{M}, i, f$ sat $U^\tau(U^{\tau_1}, \ldots, U^{\tau_n})$ see $\langle \overline{f}(U^{\tau_1}), \ldots, \overline{f}(U^{\tau_n}) \rangle \in \overline{f}(U^\tau)(i)$

2. $\mathcal{M}, i, f$ sat $U^\tau = V^\tau$ see $\langle \overline{f}(U^\tau), \overline{f}(V^\tau) \rangle \in \Delta_\equiv(\tau)$ sendo $\Delta_\equiv(\tau)$ a 'pseudo-diagonal' de $\mathcal{F}_\tau$, definida em $\mathfrak{Q}$como o subquase-conjunto de $\mathcal{F}_\tau \times \mathcal{F}_\tau$ cujos elementos são entre sí indistinguíveis. No caso de ser $\tau \neq e_1$, este quase-conjunto é a diagonal de $\mathcal{F}_\tau$ em sentido usual.

3. $\mathcal{M}, i, f$ sat $\Box A$ see $\mathcal{M}, j, f$ sat A para todo $j \in I$

4. Cláusulas usuais para $\neg$, $\rightarrow$ and $\forall$

Uma fórmula A é **verdadeira** em um g-modelo $\mathcal{M}$ (e escreve-se $\models_\mathcal{M} A$) see $\mathcal{M}, i, f$ sat A para todos $i \in I$ e $f \in As(\mathcal{M})$. Um conjunto Σ de fórmulas de $S_\omega\mathcal{I}$ é **g-satisfatível** em $S_\omega\mathcal{I}$ see para algum g-modelo $\mathcal{M}$, índice i e atribuição f, tem-se $\mathcal{M}, i, f$ sat A para toda $A \in \Sigma$. Uma fórmula A é **consequência g-semantica** de um conjunto Γ de fórmulas, e neste caso escrevemos $\Gamma \models_g A$, see $\mathcal{M}, i, f$ sat A para $i \in I$, $f \in As(\mathcal{M})$ e g-modelo $\mathcal{M}$ sempre que $\mathcal{M}, i, f$ sat B para toda fórmula $B \in \Gamma$. Se $\Gamma = \emptyset$, escrevemos $\models_g A$ e dizemos que A é **g-válida**.

4.2.3 Completude Generalizada

Pode-se mostrar que vale um teorema de correção para a lógica $S_\omega\mathcal{I}$ do seguinte modo:

Teorema 4.2.3.1 (Correção) *Se em $S_\omega\mathcal{I}$ tem-se $\vdash A$, então tem-se que $\models_g A$.*

Proof: Basta verificar que todos os axiomas de $S_\omega\mathcal{I}$ são g-válidos e que as regras de inferência preservam a g-validade, o que se segue do fato de que se $\mathcal{M}$ é um g-modelo para $S_\omega\mathcal{I}$ e o termo U^τ é livre para X^τ em $A(X^\tau)$, então para todo $i \in I$ and $f \in As(\mathcal{M})$, vem que [19]

$$\mathcal{M}; i; f, \overline{f}(C^\tau) \ \mathsf{sat}\ A(X^\tau) \text{ see } \mathcal{M}, i, f \ \mathsf{sat}\ A(C^\tau)$$

Como corolário, deriva-se que se $\Gamma \vdash A$, então $\Gamma \models_g A$ e que se um conjunto de fórmulas Σ é g-satisfatível, então Σ é consistente.

Teorema 4.2.3.2 (Completude Generalizada) *Se um conjunto Σ de fórmulas de $S_\omega\mathcal{I}$ é consistente, então é g-satisfatível.*

Proof: (Esboço)[20]

[19] A terminologia segue a de [52], e os detalhes da prova são adaptações evidentes do que se prova à p. 74 deste livro.

[20] A prova é uma adaptação daquela apresentada em [52, pp. 74ss].

Assumimos que Σ é consistente e que há uma quantidade infinita de variáveis de cada tipo que nã ocorrem em qualquer das fórmulas de Σ (em outras palavras, Σ 'omite' uma quantidade infinita de variáveis de cada tipo). Então, similarmente como em [52, p. 75], pode-se provar que existe uma sequência $\overline{\Sigma} = (\overline{\Sigma}_i)_{i\in\omega}$ de conjuntos de fórmulas tais que:

- (i) $\Sigma \subseteq \overline{\Sigma}_0$
- (ii) Para cada $i \in \omega$, $\overline{\Sigma}_i$ é consistente maximal.
- (iii) Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula $B(X^\tau)$, $\exists X^\tau B(X^\tau) \in \overline{\Sigma}_i$ see $B(Y^\tau) \in \overline{\Sigma}_i$ para alguma variável Y^τ que seja livre para X^τ em $B(X^\tau)$. Ou seja, $\overline{\Sigma}$ é uma Teoria de Henkin.
- (iv) Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula B, tem-se $\Diamond B \in \overline{\Sigma}_i$ see $B \in \overline{\Sigma}_j$ para algum $j \in \omega$.
- (v) Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula $B(X^\tau)$, tem-se $\forall X^\tau B(X^\tau) \in \overline{\Sigma}_i$ se $B(Y^\tau) \in \overline{\Sigma}_i$ para toda variável Y^τ livre para X^τ em $B(X^\tau)$.
- (vi) Para cada $i \in \omega$ e cada fórmula B, tem-se $\Box B \in \overline{\Sigma}_i$ see $B \in \overline{\Sigma}_j$ para todo $j \in \omega$.

Isso posto, o g-modelo relativamente ao qual as fórmulas de Σ são satisfatíveis pode ser descrito do seguinte modo. Inicialmente, consideramos uma relação de equivalência $\simeq$ sobre a classe Tr_τ dos termos de tipo τ, definida por: $U^\tau \simeq V^\tau$ see $\Box(U^\tau = V^\tau) \in \overline{\Sigma}_i$ se $\tau \neq e_1$ e, no caso de ser $\tau = e_1$, então $U^{e_1} \simeq V^{e_1}$ see para toda fórmula $F \in \overline{\Sigma}_i$, tem-se que $F[U^{e_1}/V^{e_1}] \in \overline{\Sigma}_i$. Em outras palavras, no caso mais problemático de $\tau = e_1$, $U^{e_1} \simeq V^{e_1}$ see U^{e_1} e V^{e_1} podem ser intersubstituíveis um pelo outro em qualquer predicado de sorte que as fórmulas resultantes sejam equivalentes.

Como mostrado em [52], a relação definida não depende de $i \in \omega$. Então, por recursão sobre τ, definimos um conjunto $\mathcal{F}_\tau$ e uma aplicação ρ_τ do conjunto de termos de tipo τ em $\mathcal{F}_\tau$ tal que:

1. ρ_τ é sobrejetora.
2. $\rho_\tau(U^\tau) \equiv \rho_\tau(V^\tau)$ see $U^\tau \simeq V^\tau$

Seja agora $\mathcal{F}_{e_i}$ o conjunto quociente $Tr_{e_i}/\simeq$ $(i = 1, 2)$[21] e seja $\rho(U^{e_i}) = [U^{e_i}]_\simeq$ (que são as classes de equivalência de U^{e_i} pela ralação $\simeq$). Supondo que $\mathcal{F}_{\tau_k}$ e que ρ_{τ_k} tenham sido definidas para $k < n$, define-se a aplicação ρ_τ de Tr_τ em $[\mathcal{P}(\mathcal{F}_{\tau_0} \times \ldots \times \mathcal{F}_{\tau_{n-1}})]^\omega$, na qual $\tau = \langle \tau_0, \ldots, \tau_{n-1}\rangle$ como se segue:

$$\langle \rho_0(U_0^{\tau_0}), \ldots, \rho_{n-1}(U_{n-1}^{\tau_{n-1}})\rangle \in \rho_\tau(U^\tau)(i)$$

see $U^\tau(U^{\tau_0}, \ldots, U^{\tau_{n-1}}) \in \overline{\Sigma}_i$. Sendo $\mathcal{F}_\tau$ a imagem de ρ_τ, então as condições 1 e 2 acima são satisfeitas. O g-modelo basedo em $D = m \cup M$ e $I = \omega$ é o par

[21] Resulta que $m = Tr_{e_1}/\simeq$, enquanto que $M = Tr_{e_2}/\simeq$.

ordenado $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}_\tau, \rho \rangle_{\tau \in \Pi}$, sendo $\rho(C^\tau) = \rho_\tau(C^\tau)$ para qualquer constante C^τ. Então, por indução sobre o comprimento da fórmula A, resulta (como em [52, p. 75])

$$\mathcal{M}, i, \mu \text{ sat } A \text{ see } A \in \overline{\Sigma_i}$$

para todo $i \in I$, sendo $\mu \in As(\mathcal{M})$. Quando $i = 0$ e $\mu = f$, obtemos o resultado desejado.

Como se pode perceber, a diferença para com o caso clássico, tal como exposto no livro de Gallin mencionado, reside em se adaptar a construção da relação de equivalência $\simeq$ de sorte a poder-se incorporar entidades de tipo e_1, para as quais a identidade não se aplica. Neste caso, impusemos que entidades 'nomeadas' por termos de mesmo tipo e_1 podem ser intersubstituíveis, com isso expressando que são indistinguíveis em sentido já anteriormente ventilado. No mais, a construção do g-modelo segue o padrão usual, posto que $\mathfrak{Q}$incorpora a lógica clássica quando nos restringimos a entidades outras que as de tipo e_1.

Por outro lado, como também apontamos em [30], a lógica $S_\omega\mathcal{I}$ pode ser estendida de modo a incorporar um Esquema de Separação na forma seguinte: sendo $\tau = \langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$, X^τ a primeira variável de tipo τ que não ocorre livre na fórmula $F(X^{\tau_1}, \ldots, X^{\tau_n})$, o esquema é:

$$\exists X^\tau \Box \forall X^{\tau_1} \ldots \forall X^{\tau_n} (X^\tau(X^{\tau_1}, \ldots, X^{\tau_n}) \leftrightarrow F(X^{\tau_1}, \ldots, X^{\tau_n}))$$

Este esquema é válido em todos os modelos standard de $S_\omega\mathcal{I}$, e é a versão formal do princípio de que toda fórmula $F(X^{\tau_1}, \ldots, X^{\tau_n})$ com variáveis livres determina um predicado.[22] Então, considerando um g-modelo $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}_\tau, \rho \rangle_{\tau \in \Pi}$ para $S_\omega\mathcal{I}$, tem-se que se $U^{\tau_1}, \ldots, U^{\tau_n}$ são elementos de $\mathcal{F}_{\tau_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\tau_n}$ respectivamente, e então o predicado F definido por

$$F(i) := \{(X^{\tau_1}, \ldots, X^{\tau_n}) : \mathcal{M}; i; f, U^{\tau_1}, \ldots, U^{\tau_n} \text{ sat } F(X^{\tau_1}, \ldots, X^{\tau_n})\}$$

para todo $i \in I$ e atribuição $f \in As(\mathcal{M})$, pertence a $\mathcal{F}_\tau$ (a terminologia é a de [52]). Consequentemente, o g-modelo é também um g-modelo para $S_\omega\mathcal{I}$ mais o esquema da separação, e um teorema de completude generalizada pode ser obtido para essa lógica estendida, do mesmo modo que em [52, pp. 76ss].

Um princípio de separação 'extensional', ou seja, que diga que cada fórmula com variáveis livres determina uma relação n-ária, pode ser adicionado à nossa lógica, assim como versões adequadas[23] de axiomas do infinito e da escolha. No entanto, pensamos que o exposto seja suficiente para prover uma idéia de como uma semântica fundada na teoria $\mathfrak{Q}$traz vantagens para se exprimir fatos mencionados anteriormente de constantes que não denotam e de predicados que não têm extensão bem definida.

---

[22] Talvez seja conveniente lembrar que nas lógicas intensionais usuais, o termo 'predicado n-ário' não significa 'relação n-ária', mas o que se denomina *relation-in-intension* (cf. [52, p. 67]).

[23] Como as apresentadas em [29] para a lógica S_ω.

Capítulo 5

Fundamentos Lógicos da Individuação

It is the theory which decides what we can observe.
A. Einstein

5.1 Nomologicidade e Lógica

Nesta seção, investigaremos com mais detalhe a lógica subjacente a uma teoria que admita que algumas das entidades básicas de que trata são unicamente coleções de propriedades,[1] ainda que não discutamos a natureza de tais propriedades. Em certo sentido, admitimos que estamos investigando a lógica subjacente a uma 'teoria *negativa* relativamente ao conceito de substância' [95].

Como vimos no Capítulo 1, essa posição é bastante próxima da daquela que admite que partículas elementares são *objetos nomológicos*, dados por leis. Este conceito, como já enfatizado, é incompatível com qualquer hipótese de uma 'primitive thisness', *quid*, 'substratum' ou *haeceitty*. Mais especificamente, o que sustentaremos é que o que é para ser considerado um *indivíduo* depende fortemente da lógica que se considere. Em particular, exemplificando mais uma vez com as entidades fundamentais de que trata a mecânica quântica, veremos que a lógica subjacente a uma teoria que admita entidades nomológicas é uma lógica não-reflexiva, na qual a Lei de Leibniz, que mencionaremos abaixo, que é um dos princípios basilares da lógica tradicional, não pode ser válida. Este caso particular tem como pano de fundo nossa tese de certo modo anti-realista de que, parodiando L. Wittgenstein, e dito de modo superficial e não preciso, os limites de nosso mundo são os limites de nossa matemática. Isso enfatiza o

[1]Tais entidades podem ser ditas serem 'indivíduos de Russell'.

papel primordial de se estudar e desenvolver lógicas e matemáticas alternativas à tradicional, como dissemos na Introdução.

A Lei de Leibniz é o princípio que informalmente assevera que 'se os indivíduos a e b têm as mesmas qualidades, eles são na realidade o mesmo indivíduo, ou seja, $a = b$, e conversamente'. Em uma linguagem de segunda ordem com igualdade, sendo F uma variável que percorre a coleção das propriedades (atributos, ou qualidades) dos indivíduos a e b, a Lei de Leibniz se escreve $x = y \leftrightarrow \forall F(F(a) \leftrightarrow F(b))$.[2]

Suponha agora que Δ é um conjunto não vazio e que $\mathcal{P}$ é a classe dos atributos dos elementos de Δ. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mathcal{P}$ é enumerável, de sorte que podemos chamar de $P_1, P_2, \ldots$ seus elementos. Se $x \in \Delta$, vamos denotar por $\mathcal{P}_x$ o subconjunto de $\mathcal{P}$ das propriedades de x.

Definição 5.1.0.1 *Para cada $x \in \Delta$, chamamos de* **rank** *de x (e escreve-se $rank(x)$) ao menor inteiro λ tal que existem $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots P_{x_\lambda}$ em $\mathcal{P}$ que* **individualizam** *x, no sentido de que se $y \in \Delta$ partilha com x (pelo menos) tais atributos P_{x_i}, então $y = x$, e isso não pode ser verificado por nenhuma coleção com menos do que λ predicados. Mais ainda, se x e y partilham uma mesma coleção de predicados, dizemos que x e y são* **indistinguíveis** *relativamente aos atributos de tal coleção (chamemo-la de C), e denotamos este fato escrevendo $x \equiv_C y$.*

Note-se que não estamos fazendo suposições como acerca da existência do rank de x. Deve-se raciocinar do seguinte modo: *se* existir um λ como na definição precedente, *então* tal λ é o rank de x. Por outro lado, também não estamos fazendo suposição alguma acerca da natureza dos elementos do conjunto Δ. Na verdade, essas coisas serão ventiladas abaixo.

Como consequência da definição precedente, resulta que se $x \notin y$, então $rank(x) \notin rank(y)$, o que implica que $\exists P(P(x) \wedge \neg P(y))$. Este resultado é uma versão do Princípio da Identidade dos Indiscerníveis.

5.1.1 Indivíduos

Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura

$$\mathcal{A} = \langle \Delta^{'}, P_k \rangle_{k \in K}$$

na qual $\Delta^{'} \subset \Delta$ e K é um conjunto de índices que contém somente índices $x_1, x_2, \ldots, x_k$ para elementos $x \in \Delta^{'}$ com $x_i < rank(x)$, $i = 1, \ldots, k$. Em outras palavras, as propriedades são escolhidas de sorte que elas não individualizem os elementos de $\Delta^{'}$. Se dispusermos de uma linguagem L com nomes $a, b, \ldots$ para os elementos de Δ, então se interpretarmos L em $\mathcal{A}$, esta estrutura age como que uma 'estrutura parcial' para os elementos de Δ com respeito a individuação.

[2] Lógicas que violam essa lei foram por nós apresentadas em [69, 29].

Vamos supor ainda que $\mathcal{A}$ possa eventualmente ser 'estendida' a uma estrutura *total*

$$\mathcal{B} = \langle \Delta, \mathcal{P} \rangle$$

na qual $\mathcal{P}$ é, como na seção precedente, a coleção dos atributos dos elementos de Δ. Em tal estrutura, os elementos de Δ podem ser 'individualizados'.[3] Vem então a seguinte definição:

Definição 5.1.1.1 *Um objeto $x \in \Delta^{'}$ é um* **indivíduo** *se a estrutura parcial $\mathcal{A}$ pode ser estendida a uma estrutura total $\mathcal{B}$ como acima.*

De imediato surge a seguinte questão: em virtude do quê a estrutura parcial $\mathcal{A}$ não poderia ser estendida a uma estrutura total $\mathcal{B}$? Afim de articular uma resposta, devemos analisar algumas relações entre a natureza dos elementos de $\Delta^{'}$, a possibilidade de estender $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ e a lógica.

Chamemos de **HIP. I** (hipótese I) a suposoção (implícita acima) de que Δ é um conjunto no sentido usual das teorias usuais de conjuntos, ou seja, seus elementos podem ser considerados como entidades 'individualizáveis'.[4] Em outras palavras, os elementos de Δ, admitem algum Princípio de Individuação. Nesta situação, dois casos podem ocorrer:

Caso A A estrutura $\mathcal{A}$ pode ser estendida a $\mathcal{B}$. Nesta situação, surgem dois subcasos:

> **A1** Se a Lei de Leibniz vale, então os elementos de $\Delta^{'}$ são individualizados por suas propriedades contidas em $\mathcal{P}$, e neste caso podemos dizer que eles são *indivíduos* no sentido da definição precedente.
>
> **A2** Se a Lei de Leibniz não vale,[5] então mesmo no caso de a e b partilharem todos os mesmos atributos, não podemos inferir que sejam a mesma entidade. Em outras palavras, as propriedades não seriam suficientes para a individualização de uma entidade. Mas, se a e b partilham das mesmas propriedades, em virtude do quê poderiam não ser a mesma entidade ? Aparentemente, sua individuação, ou característica distintiva, só poderia advir de algo 'para além das propriedades', alguma espécie de *quid* no sentido já aludido no Capítulo 1. Esta questão é delicada, e dificilmente haveria uma resposta breve. Mas fica a questão de se tenta articular uma adequada maneira de justificar essa situação. No entanto, afim de avançar um pouco na problemática, podemos imaginar que a Lei de Leibniz é simplesmente falsa, e isso pode se dar basicamente de dois modos: (1) para a e b em Δ, temos $a \notin b$ mas não existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $P(a) \wedge \neg P(b)$. Neste caso, a e b podem ser ditos diferirem *solo numero*; (2) existe P como no ítem anterior, mas $a = b$. Isso no

[3] Mais à frente, falaremos algo acerca das propriedades possíveis dos elementos de Δ.

[4] Cantor dizia que um conjunto é uma coleção, reunida num todo, de objetos *distintos* de nossa intuição ou pensamento [9, p. 85].

[5] Nossas Lógicas de Schrödinger oferecem exemplos de sistemas lógicos nos quais tal lei não vale em geral. Ver [69, 29].

entanto não pode ocorrer em teorias nas quais os indivíduos sejam nada mais do que a coleção de suas propriedades, posto que uma tal P seria uma qualidade de a mas não de b, contrariando a hipótese de que a e b são o mesmo objeto e de que um certo indivíduo deve ter as mesmas qualidades que ele próprio.

caso B A estrutura $\mathcal{A}$ não pode ser estendida a uma estrutura $\mathcal{B}$. Dois subcasos podem ocorrer:

B1 A Lei de Leibniz vale. Neste caso, apesar de não podermos individualizar os elementos de $\Delta^{'}$, uma vez que a estrutura não se estende àquela que contenha as propriedades 'essenciais' dos objetos, podemos pensar que *se* a estrutura pudesse ser estendida, *então* a individuação poderia ser alcançada. Neste sentido, os elementos de $\Delta^{'}$ podem ser considerados como individualizados 'conceitualmente', no sentido de [98, 99]. Em outros termos, podemos dizer que temos unicamente 'informações parciais' acerca dos elementos de $\Delta^{'}$, uma vez que eles não podem ser discernidos uns dos outros mesmo no caso da Lei de Leibniz valer na lógica subjacente.

B2 Se a Lei de Leibniz não vale, os elementos de $\Delta^{'}$ não podem ser individualizados nem ao mesmo 'conceitualmente'. Neste caso, a hipótese **HIP. I** mencionada acima é questionada, uma vez que a idéia intuitiva de objetos 'individuais' aparentemente perde o sentido. Em outras palavras, nesta situação não podemos assegurar que a a individualidade dos elementos de $\Delta^{'}$ possa ser conseguida, e temos um exemplo de entidades tipicamente indistinguíveis.

Este último caso merece explicação mais detalhada. Com efeito, parece que a natureza das entidades a serem consideradas depende da lógica, posto que se estamos dispostos a assumir que há somente objetos que difiram 'solo numero', devemos rejeitar a Lei de Leibniz e postular que $\mathcal{A}$ pode ser estendida a $\mathcal{B}$. Por outro lado, se a Lei de Leibniz não vale, a impossibilidade de estender $\mathcal{A}$, no escopo de teorias que não admitem 'substratum', é incompatível com qualquer idíea intuitiva deum 'indivíduo', tal como ocorre com os *quanta*, como enfatizaremos na seção seguinte.

Não obstante, cabe notar que independentemente do que sejam na realidade os objetos do domínio Δ (como objetos de uma certa 'realidade'), o fato que se está expondo é que o que poderemos ou não deles falar depende em boa medida da lógica utilizada.

5.1.2 Indivíduos e Propriedades

Em um sentido amplo, por uma *propriedade* de um objeto a, entendemos qualquer sentença, formulada em uma linguagem adequada, a qual possa ser assertada verdadeiramente de a. Podemos representar tal fato por uma fórmula

$A(x, y_1, \ldots, y_n)$, na qual x, y_i, $i = 1, \ldots, n$ são variáveis livres se A e x deve ser instanciada por (um nome de) a. Deste modo, podemos dizer que 'a é azul', 'a está entre b e c', 'a distância entre a e b é menor do que a distância entre c e d', e assim por diante, não precisando nos restringir a propriedades monádicas unicamente. Por simplicidade, representaremos a fórmula acima por $A(x)$, enfatizando somente a variável x.

Há no entanto uma propriedade monádica de a que merece consideração à parte. Trata-se do seguinte predicado I_a, definido por $I_a(x) \leftrightarrow x = a$ (formulado em uma linguagem com igualdade). Intuitivamente, I_a expressa a propriedade de 'ser idêntico a a', o que na lógica usual obviamente é verificado por a, face à hipótese de que todo objeto é idêntico a sí próprio.[6] Além disso, chamamos de Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII) o fecho universal da seguinte fórmula:

$$(A(x) \leftrightarrow A(y)) \rightarrow x = y$$

na qual A é uma variável que percorre a coleção de todas as propriedades dos objetos x e y.

Admitamos por um momento que PII é falso, valendo sua negação, por exemplo na forma seguinte:

$$(A(x) \leftrightarrow A(y)) \wedge x \neq y$$

Nas teorias 'negativas' relativamente ao conceito de substância, nas quais nada há para além das propriedades de um indivíduo, objetos x e y que verifiquem a expressão acima diferem *solo numero*. O problema está em se considerar o predicado I_a entre os possíveis atributos de a. Com efeito, nessa situação, suponha que a e b são indivíduos distintos que verifiquem a negação do PII posta acima. Neste caso, desde que partilham todos os seus atributos, em particular partilharão I_a e então $a = b$, contrariando a hipótese de que são distintos. Em outros termos, se I_a é considerado entre os predicados de a, então PII deve er um teorema da lógica subjacente.

O que resulta é que, se desejamos assumir que PII é um princípio falso,[7] então aparentemente devemos fazer uma restrição no que se entenda por 'propriedades' de um objeto, em especial eliminando coisas como I_a. Essa atitude, no entanto, nos parece *ad hoc* e não justificada. Por que deveríamos eliminar certos atributos possíveis apenas para nos conformarmos às derivações que desejarmos? Assim, se desejamos trabalhar no escopo de uma teoria que não admita nada para além das propriedades de um objeto, nenhuma espécie de *quid*, como parece sugerir a mecânica quântica, e se PII não deve valer, afim de que possamos ter, como parece ser sugerido por essa teoria, entidades indistinguíveis sob todos os aspectos, duas alternativas surgem naturalmente:

1. A lógica subjacente deve ser tal que ambos $a = b$ e $a \neq b$ sejam admissíveis. As lógicas paraconsistentes [15, 19] podem ser usadas para tal fim, e se

[6] Mais precisamente, a lei reflexiva da identidade asserta que $\forall x(x = x)$, e pode ser derivada dos axiomas da identidade em linguagens de primeira ordem.

[7] Há muita discussão na literatura sustentando este ponto de vista. Ver [47, 50], nos quais se mostra que o PII é violado na mecânica quântica.

desejarmos que não valha a conjunção $a = b \wedge a \neq b$, como parece sugerir a intuição, podemos usar uma lógica de Jaśkowski, que é um caso particular de lógica paraconsistente [?]. Neste caso, pode ocorrer que $\forall x P(X) \wedge \exists x \neg P(x)$, expressão essa que é teorema em alguns cálculos paraconsistentes. Deste modo, se x percorre a coleção dos atributos de a (hipótese essa que pode ser formalizada em uma adequada lógica de ordem superior), então podemos interpretar a fórmula acima como indicando que 'para qualquer propriedade P do objeto a, o objeto b tem essa propriedade, mas há uma propriedade específica de a (que pode ser I_a) que b não possui'. Desse modo, isto é, mediante um adequado câmbio da lógica subjacente, não precisamos fazer suposições *ad hoc* acerca das propriedades possíveis de um objeto.

2. Negar o status de *indivíduos* aos objetos em consideração.

Esta hipótese de fato merece explicção adicional. Com efeito, já discorremos suscintamente acerca da dificuldade que há com o conceito de objeto físico. Não obstante, podemos citar algumas das características principais do que chamaríamos de 'indivíduo clássico':[8]

1. Tais indivíduos têm existência no espaço e no tempo.

2. Persistem no tempo, de sorte que faça sentido dizer de um certo indivíduo que ele pode ser identificado como sendo o mesmo objeto que tenha existido em um tempo precedente.

3. São objetos de predicação, no sentido de que possa-se dizer de um indivíduo que ele tem propriedades.

4. São individualizáveis, podendo ser nomeados, contados, ordenados.

5. Suas propriedades podem ser reorganizadas, no sentido de que há diferença entre um primeiro indivíduo ter uma propriedade P e um segundo ter a propriedade Q e o inverso. Em especial, se permutarmos dois indivíduos distintos de posição, obtemos uma configuração que é em algum sentido distinta da anterior, que precedia a permuta.

Para que se possa asseverar de uma certa entidade as características acima, deve-se, ao menos conceitualmente –i.e., ainda que não na prática– pensá-lo como nomeável, individualizável e, assim, distinguível de outros. Por um *não-indivíduo*, por outro lado, devemos entender uma entidade que viole essas características, por exemplo: um não-indivíduo não pode ser 'nomeável', ou seja, receber um rótulo.[9] Um não-indivíduo não pode ser considerado idêntico ou distinto de outros, posto que neste último caso, teríamos que dizer em que sentido ele seria distinto dos demais. Por outro lado, se fosse idêntico a outros, não

[8] Baseamo-nos em [99].

[9] Schrödinger dizia que "não se pode nomear um elétron, pintá-lo de vermelho" [102].

haveria mais do que um indivíduo. Aparententemente, a questão é que palavras como 'idêntico', 'distinto' são completamente dialitezadas nesse contexto.[10]

Evidentemente, por tudo o que já se disse, as partículas elementares da física atual constituem o melhor exemplo que temos de entidades não individuais no sentido acima. E, do que se viu, concluímos que se estamos para considerar não-indivíduos de alguma espécie, em especial aceitando que falar de sua identidade ou diversidade não faz sentido, então o PII não pode ser aplicável. Reciprocamente, se PII não vale e se estamos admitindo que não há *quid*, então necessariamente nossa ontologia deve ser a de não-indivíduos de alguma espécie.

[10]Schrödinger tambem dizia que o conceito de identidade carece de sentido para as partículas elementares da física atual [101]. Ver os nossos [69, 29].

Capítulo 6

Conclusões

> E preciso forjar muitos pensamentos, não muitos conhecimentos.
> Demócrito (c. 460–370 a. C.)

No último Capítulo, relacionamos alguns assuntos ao tema desta tese afim de mostrar que uma solução ampla ao Problema de Manin exige que se leve em conta uma série ampla de fatores, que vão desde a mecânica quântica propriamente dita à eventual necessidade de se considerar lógicas alternativas à clássica, assim como teorias de conjuntos alternativas às usuais, sem esquecer toda a problemática de natureza filosófica que está por trás disso tudo, e que não pode em hipótese alguma ser desmerecida, posto que sua discussão pode motivar desenvolvimentos alternativos do ponto de vista matemático.

Na atualidade, não só é preciso reconhecer que os fundamentos da matemática constituem uma disciplina matemática com características próprias,[1] mas que um trabalho atual abrangente nessa área não pode desconsiderar assuntos como as matemáticas não cantorianas, as lógicas heterodoxas e as matemáticas nelas fundamentadas. Ademais, não se deve indagar tão somente acerca do trabalho puramente matemático que possa ser realizado em cada uma dessas vertentes, como foi a tona das pesquisas fundacionistas deste século mas, tendo-se em vista as motivações oriundas das mais diversas disciplinas científicas, o cientista (diríamos, o 'fundacionista') deve estar também habilitado a erigir sistemas logico-matemáticos alternativos que possam ser úteis a uma determinada área do saber, via de regra baseando-se em dispositivos que podem se desviar substancialmente da matemática e da lógica padrão.

O caso aqui ilustrado da mecânica quântica e da questão da identidade e

[1]Pode-se ver [46, 56, 94] sobre este ponto.

da individualidade das partículas elementares é apenas uma dessas situações. Outras poderiam ser mencionadas, como por exemplo na biologia, onde ainda se espera pelo desenvolvimento de uma mereologia adequada.

O que se aprende dessa profusão de sistemas lógico-matemáticos alternativos, e das possibilidades de se desenvolver aquele que se ache ser melhor adaptadado a uma situação particular, é que não há modo único de se edificar uma disciplina científica, mas também aprende-se que não há esta ou aquela formulação que deva, *in principio*, ser considerada como superior às demais. Dentre todas as 'possibilidades', compete ao cientista decidir qual a que melhor se adapta aos seus interesses particulares de momento, seja pela simplicidade, seja pela capacidade explicativa, seja pela intuitividade ou outro critério, nada impedindo que, se as finalidades forem outras, uma outra base fundacional seja a utilizada.

Deste modo, pode-se fundamentar a mecânica quântica na matemática tradicional (como faz a interpretação de Copenhagen), ou então via uma teoria de quase-conjuntos (tema ainda por ser adequadamente desenvolvido), ou ainda via uma 'mereologia quântica' no sentido apontado no Capítulo precedente, dentre outras possibilidades (lógicas de Schrödinger, por meio de *quasets*, lógicas sortais, etc.)

A 'grande verdade', se é que pode-se dizer que há uma, poderia ser iluminada pelo seguinte dito de C. S. Peirce, o qual fundamentou um dos desenvolvimentos mais interessantes que se pusseram na literatura recentemente, aquele da *quase-verdade*, ou *verdade pragmática* [16]:

> Consider what effects, that might conceivably have practical bearings, we conceive the object of our conception to have [ou seja, nossas teorias]. Then, our conception of those effects is the whole of our conception of the object. (citado em [16])

Ou seja, dada uma certa abordagem fundacional a determinada disciplina, ela será 'útil' se seus *efeitos* forem aqueles esperados, podendo eventualmente uma abordagem alternativa ser mais adequada para outros propósitos. Não há regra geral que 'forçe' uma determinada disciplina científica ser desta ou daquela maneira no que se refere aos seus fundamentos lógico-matemáticos, a conveniência, dentre outros critérios, devendo prevalescer sempre.

Para finalizar, gostaríamos de explicar algo acerca desta tese. Ainda que neste ponto sejamos popperianos em acreditar que as dificuldades em se elaborar um trabalho acadêmico só possam eventualmente interessar a um eventual biógrafo do cientista, o trabalho devendo ser julgado pela sua 'objetividade' (no sentido de ser um objeto do *mundo 3* de Popper), alertamos que esta tese foi totalmente escrita durante Julho e começo de Agosto de 1995; isso talvez explique (ainda que não justifique) termos deixado tantos temas, aqui mencionados, sem uma solução adequada ou ao menos um encaminhamento satisfatório. Esperamos no entanto que as idéias aqui ventiladas possam motivar outros trabalhos, de certo modo realizando o dito de Demócrito mencionado na epígrafe, mas que tais trabalhos futuros engendrem também mais 'conhecimentos' acerca dos fundamentos das disciplinas científicas em geral, mormente a partir da base que se alcançou com a matemática deste século.[2]

[2]Ainda que, no que se refere ao dito de Demócrito, malgrado o grande problema de interpretação, que não precisa ser aqui repetido, entendamos que para forjar pensamentos em ciência seja imperioso um grande conhecimento.

Bibliografia

[1] Barwise, J. (ed.), *Handbook of mathematical logic*, Amsterdam, North-Holland, 7th impression, 1991.

[2] Bitbol, M., 'Esquisses, forme et totalite (Schrödinger et le concept d'objet)', in [3, pp. 41–79]

[3] Bitbol, M. and Darrigol, O. (eds.), *Erwin SchrŤdinger: philosophy and the birth of quantum mechanics*, Paris, Frontières, 1992.

[4] Bitbol, M., 'L'aveuglante proximité du réel', *Critique* **576**, Mai 1995, 359–382.

[5] Bohr, N. 'Quantum physics and philosophy: causality and complementarity' (in) Klibanski, R. (ed.) *Philosophy in the Mid–Century, I.* Firenze, La Nuova Italia, 1958, 308–314.

[6] Bourbaki, N., *Theory of sets*, Paris, Hermann & Addison-Wesley, 1968.

[7] Bourbaki, N., *Elements of the history of mathematics*, Springer-Verlag, 1994.

[8] Browder, F. E. (ed.), *Mathematical problems arising from Hilbert problems*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics XXVIII, Providence, American Mathematical Society, 1976.

[9] Cantor, G., *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, Traduzido e com introdução de P. E. B. Jourdain, New York, Dover Pu., 1955.

[10] Carnap, R., *Introduction to logic and its applications*, New York, Dover, 1958.

[11] Carnap, R., *The logical structure of the world*, Berkeley and Los Angeles, Un. of California Press, 1967.

[12] Cohen, P., *Set-theory and the continuum hypothesis*, W. Benjaminn, 1963.

[13] Cook, J. M., 'The mathematics of second quantization', *Proceedings of the Nature Academy of Sciences* **37** (7), 1951, 417-420.

[14] Corsi, G. et al. (eds.), *Bridging the gap: philosophy, mathematics, physics*, Dordrecht, Kluwer Ac. Press, 1992.

[15] da Costa, N. C. A., 'On the theory of inconsistent formal systems', *Notre Dame J. of Formal Logic* **15**, 1974, 497–510.

[16] da Costa, N. C. A., 'Logic and pragmatic truth', in Fenstad, J. E., *Logic, methodology and philosophy of science XVIII*, Elsevier Sc. Pu., BV, 1989, 247–261.

[17] da Costa, N. C. A., 'Matemática e paraconsistência', *Mon. Soc. Paran. Mat.* **7**, 1989.

[18] da Costa, N. C. A., 'O ambiente matemático no século XIX e a lógica do século XX', in Évora, F. R. R. (ed.), *Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea*, Atas do Sétimo Colóquio sobre História da Ciência, Outubro 12-15, 1991. Campinas, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp (Coleção CLE 11), 1992, 60-64.

[19] da Costa, N. C. A., *Ensaio sobre os fundamentos da lćgica*, SÆo Paulo, Hucitec, 2a. ed., 1994.

[20] da Costa, N. C. A., 'Review of Roberto Poli's *Ontologia Formale*, Genoa, Marietti, 1992', *Math. Reviews*

[21] da Costa, N. C. A., *O conhecimento científico*, a aparecer pela Ed. Brasiliense.

[22] da Costa, N. C. A., 'Review of [71]', a aparecer em *Math. Reviews*.

[23] da Costa, N. C. A. and Dubikajtis, L. "On Jaśkowski's discussive logic", (in) Arruda, A. I., da Costa, N. C. A. and Chuaqui, R. (eds.) *Non–Classical Logics, Model Theory and Computability*, Noth Holland, 1977, 37–56.

[24] da Costa, N. C. A. and Chuaqui, R., 'On Suppes' set theoretical predicates', *Erkenntnis* **29** (1988), 95-112.

[25] da Costa, N. C. A., and French, S., 'The model theoretical approach in the philsophy of science', *Philosophy of Science* **57**, 1990, 248–265.

[26] da Costa, N. C. A., Krause, D. and French, S., 'The Schrödinger problem', in [3, pp. 445-460].

[27] N. C. A. da Costa and F. A. Doria, 'Suppes predicates for classical physics', in J. Echeverria, A. Ibarra and T. Mormann (eds.), *The space of mathematics*, Berlin and New York, Walter de Gruyter, 1992, 168-191.

[28] da Costa, N. C. A., French, S. and Krause, D., 'Some remarks on sortal logics and physics', a aparecer.

[29] da Costa, N. C. A. and Krause, D., 'Schrödinger logics', *Studia Logica* **53**, 1994, 533–550.

[30] da Costa, N. C. A. and Krause, D., 'An intensional Schrödinger logic', a aparecer.

[31] da Costa, N. C. A. and Krause, D., 'Set-theoretical models for quantum systems', a aparecer.

[32] Dalla Chiara, M. L., 'Some foundational problems in mathematics suggested by physics', *Synthese* **62**, 1985, 303-315.

[33] Dalla Chiara, M. L., 'Names and descriptions in quantum logics', in Mittelstaed, P. and E. -W. Stachow (eds.), *Recent developments in quantum logics*, Mannheim, 1985, 189-202.

[34] Dalla Chiara, M. L. 'An approach to intensional semantics', *Synthese* **73**, 1987, 479–496.

[35] Dalla Chiara, M. L. 'Some foundational problems in mathematics suggested by physics', *Synthese* **62**, 1987, 303–315.

[36] Dalla Chiara, M. L. e Toraldo di Francia, G., *Le teorie fisiche: un'analisi formale*, Torino, Boringhieri, 1981.

[37] Dalla Chiara, M. L. and Toraldo di Francia, G., 'Individuals, kinds and names in physics', in [14, pp. 261–283].

[38] Dalla Chiara, M. L. and Toraldo di Francia, G., 'Quine on physical objects', preprint.

[39] Dalla Chiara M. L. and Toraldo di Francia, G., 'Identity questions from quantum theory', in Gavroglu et. al. (eds.), *Physics, philosophy and the scientific community*, Dordrecht, Kluwer, 1995, 39–46.

[40] Dalla Chiara, M. L. and Krause, D., 'Some remarks on the axiomatics and on the interpretation of quasi-sets', preprint.

[41] Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R. and Krause, D., 'Quasiset theories for microobjects: a comparision', preprint.

[42] Darrigol, O., 'Schrödinger's statistical physics and some related themes', in [3, pp. 237–276].

[43] d'Espagnat, B., *Le réel voilé*, Paris, Fayard, 1994.

[44] Farah, E., *Algumas proposições equivalentes ao axioma da excolha*, Curitiba, Editora da UFPR, 1994.

[45] Feferman, S., 'Intensionality in mathematics', *J. Phil. Logic* **14**, 1985, 41–55.

[46] Feferman, S., 'Working foundations–'91', in [14, pp. 99–124].

[47] French, S., 'Identity and individuality in classical and quantum physics', *Australasian Journal of Philosophy* **67**, 1989, 432–446.

[48] French, S., 'Individuality, supervenience and Bell's theorem', *Philosophical Studies* **55**, 1989, 1–22.

[49] French, S., 'Why the principle of the identity of indiscernibles is not contingently true either', *Synthese* **78**, 1989, 141-166.

[50] French, S. and Redhead, M., 'Quantum physics and the identity of indiscernibles', *British Journal for the Philosophy of Science* **39** (1988), 233-246.

[51] French, S. and Krause, D., 'Vague identity and quantum non-individuality', *Analysis* **55** (1), 1995, 20–26.

[52] Gallin, R., *Intensional and higher-order modal logic*, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[53] Geroch, R., *Mathematical physics*, Chicago, Chicago Un. Press, 1985.

[54] Gochet, P. and Thayse, A., 'Logique intensionalle et langue naturalle', as Chapter 2 of Thayse, A. et al. *Approche logique del'intelligense artificielle*, Vol. 2: De la logique modale à la logique des bases donnés, Dunod, Paris, 1989.

[55] Gonseth, F., *Les mathématiques et la réalité*, A. Blanchard, Paris, 1936. (New edition, 1974)

[56] Hatcher, W. S., *The logical foundations of mathematics*, Pergamon Press, 1982.

[57] Heisenberg, W., *The physical principles of the quantum theory*, New York, Dover, 1949. (First published by the Un. of Chicago Press, 1930).

[58] Heisenberg. W., *Physics and Philosophy*, London, Allen & Unwin, 1958.

[59] Heisenberg, W., 'Qué es una partícula elemental?', in *Encuentros y conversaciones con Einstein y otros ensayos*, Madrid, Alianza, 1979, 79–96.

[60] Hilbert. D., 'Mathematical problems', in [8, pp. 1–34].

[61] Hilbert, D. and Ackermann, W., *Principles of mathematical logic*, New York, Chelsea, 1951.

[62] Jammer, M., *Philosophy of Quantum Mechanics*, New York, John Wiley, 1974.

[63] Jammer, M., *The conceptual development of quantum mechanics*, New York, McGraw Hill, 1966.

[64] Jane, I., 'Lógica y ontología', *Theoria* **10**, 1989, 81–106.

[65] Jauch, T., *Foundations of quantum mechanics*. New York, Addison-Wesley, 1968.

[66] Jech, T., 'About the axiom of choice', in [1, pp. 345–370].

[67] Jost, R., 'The general theory of quantized fields', *Amer. Lectures in Appl. Math.* **4**, Providence, Math. Soc., RI 1965.

[68] Kneebone, G. T., *Mathematical logic and the foundations of mathematics*, London, Van Nostrand, 1963.

[69] Krause, D., *Não-reflexividade, indistinguibilidade e agregados de Weyl*, Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo, 1990.

[70] Krause, D., 'A 'dialetização' da teoria tradicional da identidade', *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* **11** (2), 1990, 159-175.

[71] Krause, D., 'Multisets, quasi-sets and Weyl's aggregates', *J. of Non-Classical Logic* **8** 2), 1991, 9–39.

[72] Krause, D., 'On a quasi-set theory', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **33** (3), 1992, 402–411.

[73] Krause, D., 'Non-reflexive logics and the foundations of physics', in Cellucci, C., Di Maio, M. C. e Roncaglia, G., (eds.), *Logica e Filosofia della Scienza: problemi e prospettive*, (Atti del Congresso Triennale della Società Italiana di Logica e Filosofia delle Scienze, Lucca, Gennaio 1993), Ed. ETS, Pisa, 1994, 393–405.

[74] Krause, D., 'The theory of quasi-sets and ZFC are equiconsistent', in Carnielli, W. A. and Pereira, L. C. (eds.), *Logic, sets and information*, (Proceedings of the Xth Brazilian Conference on Mathematical Logic, Itatiaia, 1993), UNICAMP, Col. CLE vol 14, 1995, 145–155.

[75] Krause, D., 'Note on paraconsistency and complementarity', a aparecer.

[76] Krause, D. and French, S., 'A formal framework for quantum non–individuality', *Synthese* **102**, 1995, 195–214.

[77] Krause, D. and Béziau, J. -Y., 'Relativisations of the principle of identity', preprint.

[78] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, Vol. 3 of 'Course of Theoretical Physics'. London and Paris, Pergamon Press, 1959.

[79] Locke, J., *Ensaio sobre o entendimento humano*, Abril, 1978 (Col. Os Pensadores).

[80] Manin, Yu. I., 'Problems of present day mathematics: I (Foundations)', (in) Browder, F. E. (ed.) *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **28** American Mathematical Society, Providence, 1976, p. 36.

[81] Manin, Yu. I., *A course in mathematical logic*, New York, Springer-Verlag, 1977.

[82] Manin, Yu. I., *Mathematics and physics*, Boston, Birkäuser, 1981.

[83] Mattuck, R. D., *A guide to Feynman diagrams in the many-body problem*, New York, Dover, 2nd ed., 1976.

[84] Mendelson, E., 'Review of [72]', *Zbl. Math.* **774**, 1993, 12 (03032).

[85] Merzbacher, E., *Quantum mechanics*, New York, John Wiley and Sons, 2nd ed., 1974.

[86] Mortensen, C., 'Models for inconsistent and incomplete differential calculus', *Notre Dame J. of Formal Logic* **31** (2), 1990, 274–285.

[87] Mosterín, J., *Conceptos y teorías en la ciencia*, Madrid, Alianza Ed., 2^a ed., 1987.

[88] Mittelstead, P., 'Constituting, naming and identity in quantum logic', (in) (in) Mittelstaed, P. and E. –W. Stachow (eds.) *Recent developments in quantum logics*, Mannheim, 1985, 215-234.

[89] Noll, W., 'The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics', in the Proceedings of the Berkeley Symposium on the Axiomatic Method, 1959, 266–281.

[90] Pelletier, F. J., 'Review of E. J. Lowe's *Kinds of being: a study of individuation, identity and the logic of sortal terms* (Aristolelian Society series, vol. 10) Oxford and New York, Basil Blackwell, 1989', *History and philosophy of logic* **34**, 1990, 125–128.

[91] Penrose, R., *The emperor's new mind*, Oxford, Oxford Un. Press, 1989.

[92] Popper, K., *O conhecimento objetivo*, EdUSP, 1975.

[93] Post, H. 'Individuality and physics', *The Listener* **70**, 1963, 534-537. Reprinted in *Vedanta for East and West* **32**, 1973, 14-22.

[94] Prawitz, D., Remarks on Hilbert's program for the foundations of mathematics', in [14, pp. 89–98].

[95] Quinton, A., *The nature of things*, London, Routledge & Kegan Paul, 1973.

[96] Redhead, M. L. J., 'A philosopher looks at the quantum field theory', in Brown, H. R. and Harré, R., (eds.), *Philosophical foundations of quantum field theory*, Oxford, Clarendon Press, 1988, 9–23.

[97] Redhead, M., *Incompleteness, nonlocality and realist: a prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics*, Oxford, Clarendon Press, 1987.

[98] Redhead, M. and Teller, P., 'Particles, particle labels, and quanta: the toll of unacknowledged metaphysics', *Foundations of Physics* **21** (1991), 43-62.

[99] Redhead, M. and Teller, P., 'Particle labels and the theory of indistinguishable particles in quantum mechanics', *British Journal for the Philosophy of Science* **43** (1992), 201-218.

[100] Rescher, N., 'Mereology', in *The New Enciclopaedia Britannica*, Vol. 23, 1987.

[101] Schrödinger, E., *Science and humanism*, Cambridge Un. Press, Cambridge, 1952.

[102] Schrödinger, E., 'What is matter?', *Scientific American*, September 1953, 52-57.

[103] Schrödinger, E., *Science theory and man*, Allen and Unwin, London, 1957.

[104] Schrödinger, E., *Physique quantique et représentation du monde*. Paris, Seuil, 1992.

[105] Stevenson, L., 'A formal theory of sortal quantification', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **16** (2), 1975, 185-207.

[106] van Stigt, W. P., *Brouwer's intuicionism*, Amsterdam, North-Holland, 1990 (Stud. in the History and Phil. Maths., Vol. 2).

[107] Suppes, P., *Introduction to logic*, Amsterdam, Van Nostrand, 1957.

[108] Suppes, P., 'A comparision of the meaning and uses od models in mathematics and the empirical sciences', *Synthese* **12** (1960), 287-301.

[109] Suppes, P., *Set-theoretical structures in science*, Stanford Un., 1967.

[110] Suppes, P., 'The role of formal methods in the philosophy of science', in Asquith, P. D. and Kyburg, H. E., *Current research in the philosophy of science*, East Lansing, Mich., PSA, 1979, 16–27.

[111] Tarski, A., *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*, New York, Oxford Un. Press, 1965.

[112] Teller, P., 'Quantum physics, the identity of indiscernibles and some unanswered questions', *Philosophy of Science* **50** (1983), 309-319.

[113] Teller, P., *Quantum field theory*, notas mimeografadas.

[114] Tennat, N., 'Continuity and identity', *Journal of Philosophical Logic* **6**, 1977, 223–231.

[115] Terricabras, J. -M. and Trillas, E., 'Some remarks on vague predicates', *Theoria – Segunda Época* **10**, 1989, 1–12.

[116] Toraldo di Francia, G., 'What is a physical object?', *Scientia* **113** (1), 1978, 57–65.

[117] Toraldo di Francia, G., *The investigation of the physical world*. Cambridge, Cambridge Un. Press, 1981.

[118] Toraldo di Francia, G., 'Connotation and denotation in microphysics' (in) Mittelstaed, P. and E. –W. Stachow (eds.) *Recent developments in quantum logics*, Mannheim, 1985, 203-214.

[119] Toraldo di Francia, G., *Le cose e i loro nomi*. Bari, Laterza, 1986.

[120] Takeuti, G., *Two applications of logic to mathematics*, Iwanami Shoten, Pu. and Princeton Un. Press, 1981.

[121] Takeuti, G., 'Quantum set theory', in Beltrametti, E. et al. (eds.), *Current issues in quantum logic*, New York, Plenum Press, 1981, 303–322.

[122] van Fraassen, B., 'The problem of indistinguishable particles', in Cushing, J. T., Delaney, C. F. and Gretting, G. M. (eds.), *Science and reality: recent work in the philosophy of science*, Essays in honour of Erman Mc Mullin), Notre Dame, Un. Notre Dame Press, 1984, 153–172.

[123] van Fraassen, B., *Quantum mechanics: an empiricist view*, Oxford, Oxford Un. Press, 1991.

[124] Wallace, J. R., 'Sortal predicates and quantification', *The Journal of Philosophy* **62**, 1965, 8–13.

[125] Weyl, H., *Philosophy of mathematics and natural science*, Princeton, Princeton Un. Press, 1949.

[126] Whitehead, A. N. and Russell, B., *Principia mathematica*, Cambridge Un. Press, Cambridge, 1925, Vol. I, Introduction.

[127] Zadeh, L. A., 'Fuzzy sets', *Inform. Control* **8**, 1965, 338–353.