Los Casi-Conjuntos y la Física Cuántica

Décio Krause
Departamento de Filosofía
Universidad Federal de Santa Catarina
Florianópolis, SC – Brasil
www.cfh.ufsc.br/~dkrause

Buenos Aires, UBA, 7 Junio 2007

GLFC

UFSC

Grupo de Lógica y Fundamentos de la Ciencia
UFSC/CNPq

- la física cuántica habla (mismo que implícitamente) de objetos físicos de algún tipo ..
- … poco importando el modo como son tratados: como partículas, campos, cuerdas,…
- Las teorías cuánticas son sobre “algo”, y ese “algo” difiere de aquéllos que usualmente llamamos de “objetos” en el sentido usual, o sea, entidades espacio-temporalmente separadas, existiendo por ellas mismas.
- Esas “cosas” más básicas de que hablan las teorías son generalmente llamadas de *partículas,* y son obtenidas por abstracciones en las teorías (campos → partículas).
- Deseamos estudiar las propiedades básicas de esas entidades.

- En general, se reconoce que los “objetos cuánticos” (los *quanta*) son de naturaleza distinta de los “objetos clásicos” (de la física clásica).
- "“(…) las personas rechazan los objetos cuánticos por que ellos son diferentes [de los objetos tratados por la física clásica], pero todo lo que sus argumentos muestran no es que no haya en el dominio cuántico objetos como los clásicos, y no que no haya objetos cuánticos.”
- (Auyang, S. Y. *How is quantum field theory possible?* Princeton Un. Press, 1995, p. 5)

Características de los ‘objetos clásicos’

- Son *continuants*, o sea, tienen una individualidad que permite que sean identificados como siendo los mismos en tiempos posteriores a las primeras observaciones.
- Reichenbach: tienen *genidentity*, o identidad trans-temporal
- Pueden ser objetos de predicación, o sea, podemos atribuir propiedades a ellos.
- Son sujetos al Principio de Impenetrabilidad.
- Pueden recibir nombres, ser contados, ordenados, y hay una diferencia entre un objeto *a* tener una propiedad *A* y el objeto *b* tener una propiedad *B* y es opuesto :obedecen a la estadística de Maxwell-Bolzmann.
- Podemos decir que hay “designadores rígidos” en ese mundo.
- tienen individualidad (en sentido que veremos)
- Los objetos clásicos obedecen la teoría de la identidad de la lógica y de las matemáticas tradicionales.
  - *Tienen identidad*
- Sus colecciones pueden ser vistas como *conjuntos* de las teorías usuales de conjuntos.

Características de los 'objetos cuánticos'

- Son *objetos nomológicos*, dados por las leyes físicas: ya vienen empaquetados como tales por las teorías como siendo objetos de cierto tipo.
- Todos los electrones tienen las mismas carácteríeticas, como

$$m = 9.1 \times 10^{-28} \text{ g}$$

$$e = 4.8 \times 10^{-10} \text{ u.s.u.}$$

$$s = \pm ½$$

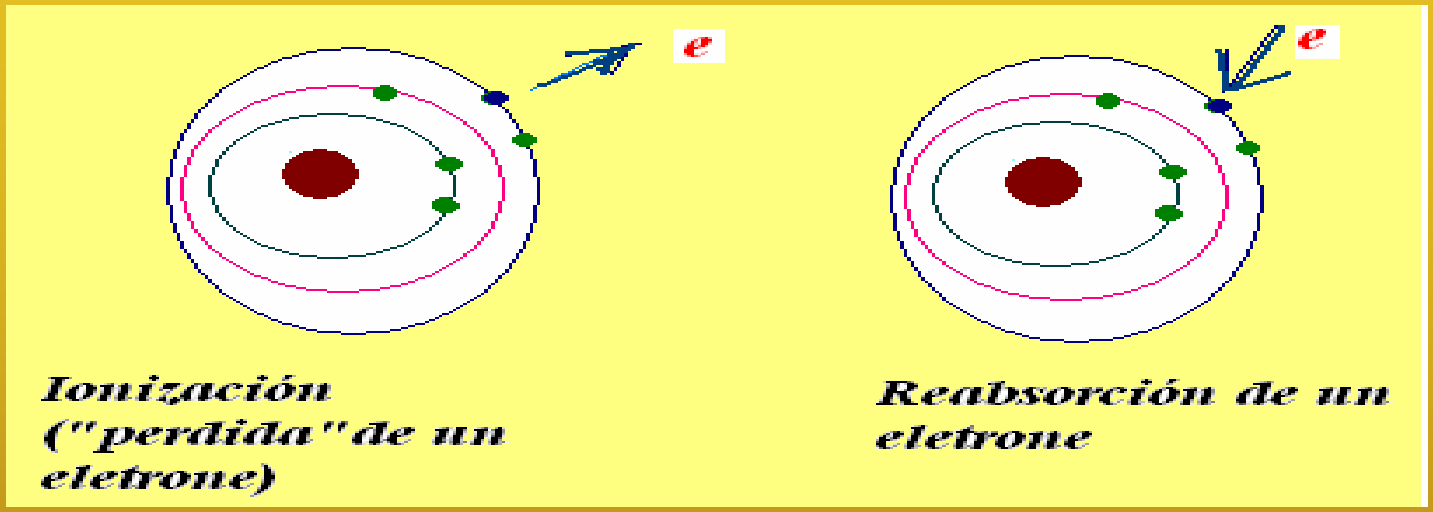
Si algo tiene las mismas carga eléctrica y spin, pero tiene masa = 9.1×10^{-25} g, es un *muon*.

Esas propiedades son "esenciales".

Características de los ‘objetos cuánticos’

- Los objetos cuánticos, en la mayor parte de las interpretaciones, no son *continuants*.
- Esas entidades presentan una *mock individuality*, que se pierde así que se misturan con otros quanta de misma especie.
- Pueden ser, como los clásicos, objetos de predicación, o tener propiedades, como spin, masa o momento angular.

- No hay nombres ("designadores rígidos") en ese mundo.
- La individuación de esos objetos en ciertos momentos, o mismo cuando permanecen aprisionados por un cierto tiempo, son "fingidas". El aprisionamiento no hace de ellos "individuos" (como veremos).
- Se son "indiscernibles", pueden ser "permutados" sin que se altere la "situación física".



- Roger Penrose: **"se una partícula del cuerpo de una persona fuera cambiado con una partícula de la pared de su casa, entonces nada habría ocurrido de facto."**
- **Para que eso acontezca, entra en cena el Postulado de la Indiscernibilidad, PI, que expresa la invarianza por permutaciones (de *quanta* "idénticos").**

- En la mayor parte de las *mecánicas cuánticas*, la indiscernibilidad de los *quanta* debe ser considerada de algún modo, debido a las estadísticas cuánticas, los estados de superposición, etc.
- El PI: $\langle\psi|Q|\psi\rangle = \langle P\psi|Q|P\psi\rangle$
- La QFT hace uso de esa indiscernibiidad "directamente", una vez que los estados físicos son caracterizados por el número de partículas (los operadores *número de ocupación*).
- La teoría de Bohm: la ecuación de Schrödinger es "ayudada" por una ecuación de la "onda piloto".
- Los *quanta* son individuos a lo par con sus "hermanos clásicos", pero hay objeciones:
- "la producción de partículas en fenómenos de colisión son extremamente difíciles [de se describir]"
- (B. d'Espagnat *On Physics and Philosophy,* Princeton Un. Press, 2006, p.45).

Consecuencias del Postulado de la Indiscernibilidad

- 1. PI divide el relevante espacio de Hilbert en sub-espacios irreductibles que corresponden a diferentes tipos de simetría (B-E, F-D, para-estadísticas,…)
- Eses sub-espacios corresponden a representaciones irreductibles en el grupo de las permutaciones
- 2. PI implica en restricciones en los observables a los cuales los operadores de permutación ciertamente no pertenecen, pues dan el mismo valor para indiscernibles.

- 2 PI origina la llamad *Received View*: los quanta son no-individuos.
- 1900 Planck en la ley de la radiación del cuerpo negro, utilizó

$$W = \frac{(N+P-1)!}{N!(P-1)!}$$

- Ehrenfest: la hipótesis de Planck conduce a la indiscernibilidad de los quanta
- Heisenberg: la individualidad se perdió
- Max Born: "si los fotones hubiesen sido tratados como partículas genuinas, teniendo individualidad, la ley de Planck no habría sido obtenida"
- Hermann Weyl: los quanta no son individuos
- Schrödinger: el concepto de identidad carece de sentido para esas entidades

- Hay dos “metafísicas posibles”: los quanta como individuos y los cuanta como no-individuos.
- La física no nos ayuda a decidir entre ellas: hay una “indeterminación” de la metafísica por la física (*pace*, Aristotélicos).
- Hay entonces (por lo menos) dos *perspectivas* para se mirar los quanta.
- Vamos dar atención a la perspectiva de los no-individuos.

- Heinz Post (1963): la indiscernibilidad de los objetos cuánticos debería ser asumida *right from the start*.

- Yuri Manin (1976): las colecciones de quanta indiscernibles no son “conjuntos”; debemos buscar axiomas para tratar de esas colecciones (como en las teorías de conjuntos usuales).

- Dalla Chiara & Toraldo di Francia (1978,1993): la semántica de un “lenguaje cuántica” tendrá problemas con la indiscernibilidad, pues las extensiones de ciertos predicados (como “tener spin UP en una dirección específica” no tienen extensión bien definida (no son “conjuntos”).

- Newton da Costa (1980): una semántica sensata para una lógica (al estilo Schrödinger) sin identidad no debería ser hecha en las teorías clásicas de conjuntos.

- ¿En virtud de qué esas colecciones no serían “conjuntos”?
- Los postulados de las teorías usuales de conjuntos (como teorías de primera orden con identidad, “=“):
- (Reflexividad) $\forall x\ (x=x)$
- (Substitutividad) $\forall x\ \forall y\ (x=y \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y)))$
- Teorema: a) (Simetría) $\forall x\ \forall y\ (x=y \rightarrow y=x)$

  b) (Transitividad) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x=y \wedge y=z \rightarrow x=z)$

  La identidad es una congruencia.

  (la más débil, la que está contenida en todas las otras)

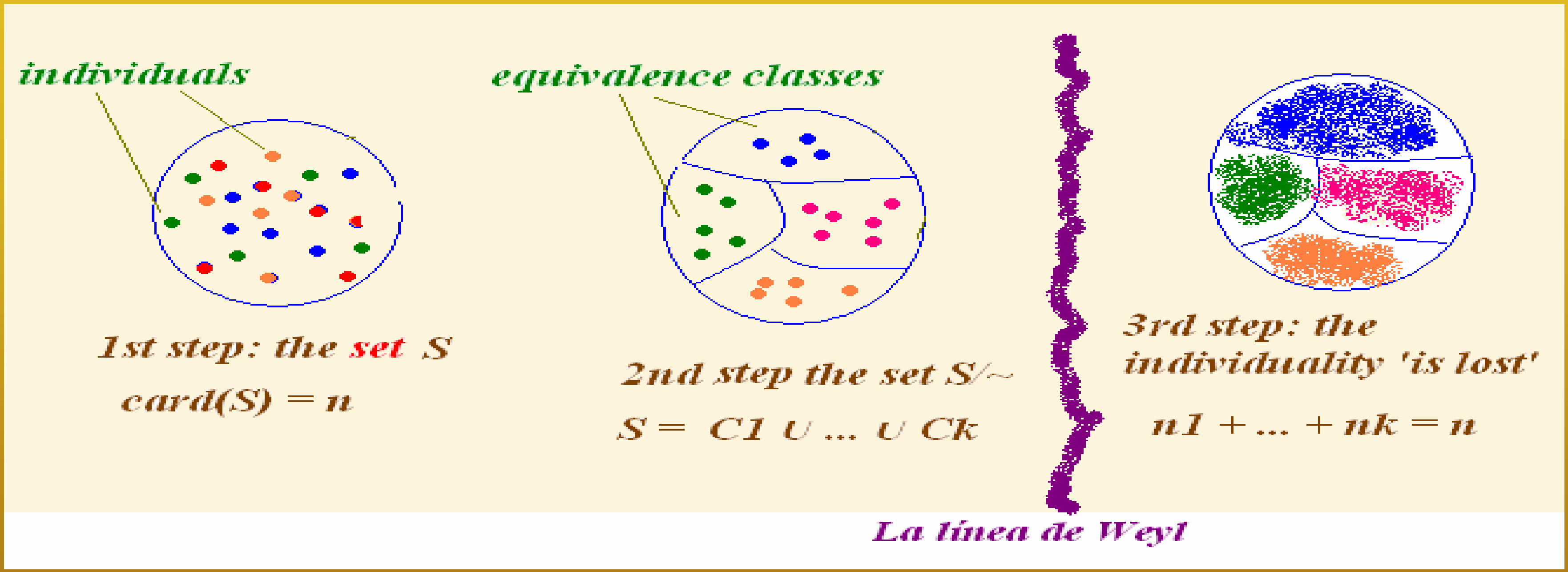
- El Axioma de la Extensionalidad:

  $$\forall x\ \forall y(\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x=y)$$

- Cantor: un conjunto es una colección de objetos distintos de la intuición o del pensamiento.

¿Como trabajar con la indiscernibilidad?

Herman Weyl y los agregados de individuos



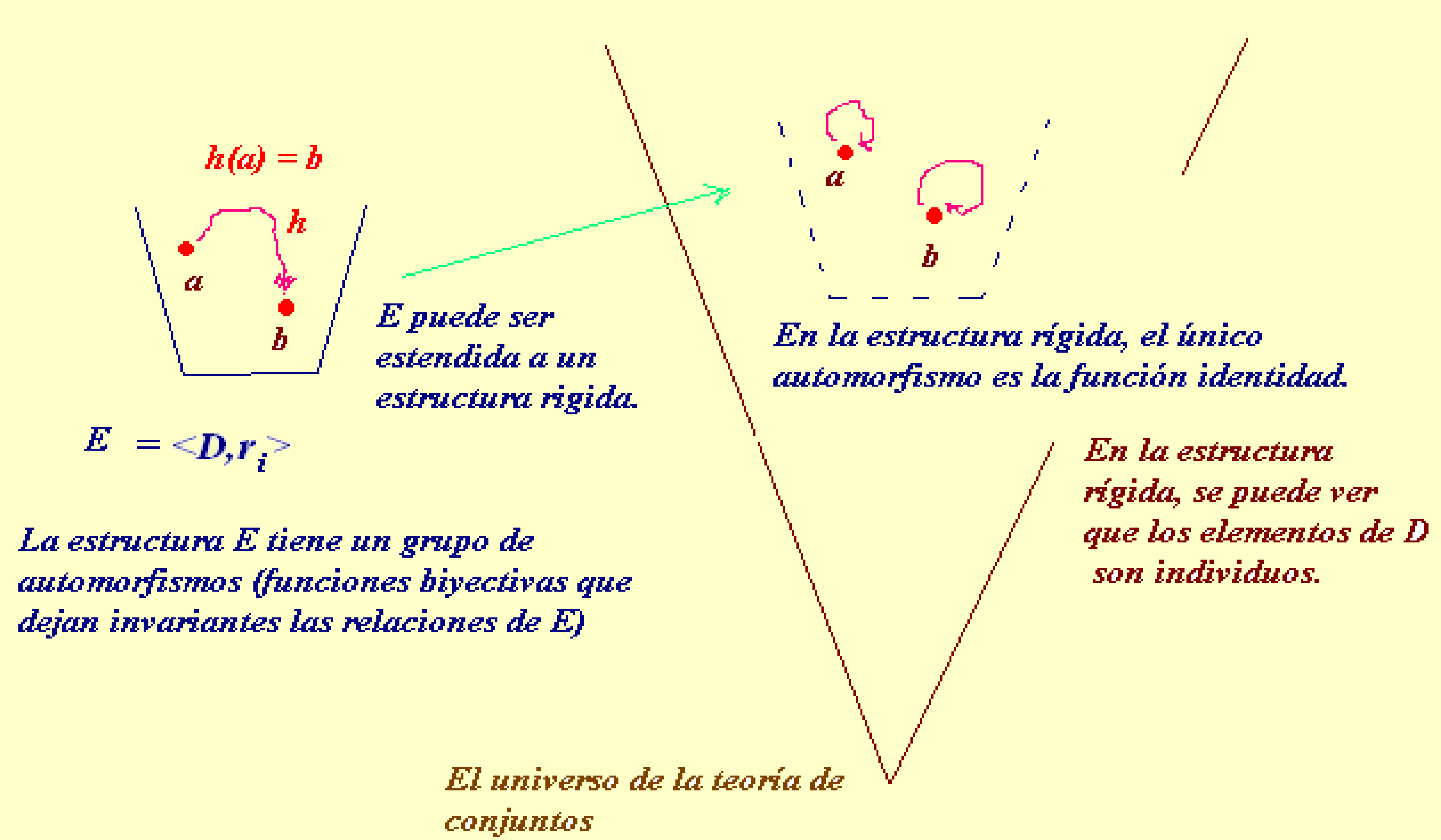
- Empezmos con un conjunto S (card(S) = n) con una relación de equivalencia ~
- Tomamos el conjunto cuociente C/~
- Las clases de equivalencia son los "estados" posibles.
- Cada clase C_k tiene un cardinal n_k de suerte que $\Sigma n_k = n$
- Para Weyl, esa "descomposición ordenada" es lo que importa
- Empezando después de la línea de Weyl, ignoramos las dos primeras etapas.

Postulados de una teoría

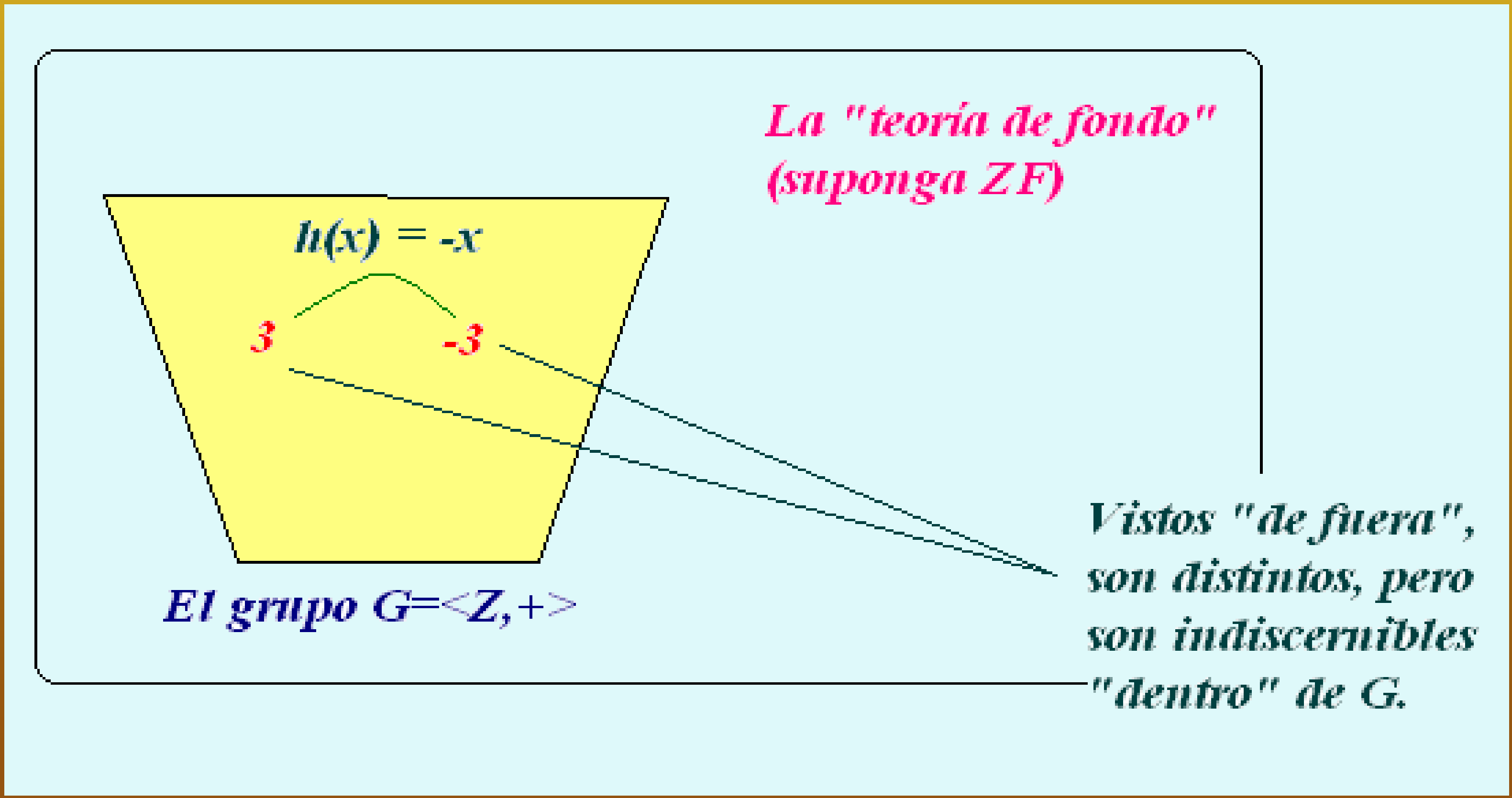
1-postulados “lógicos”

- 2-postulados “matemáticos”
- 3-postulados específicos (grupos, espacios lineales, mecánica cuántica …)
- Un *modelo* para una teoría debe ser un modelo para todos los tres niveles de axiomas.
- O sea, no podemos olvidar las etapas previas a la línea de Weyl.
- Debemos ojear a la lógica (incluyendo la matemática).

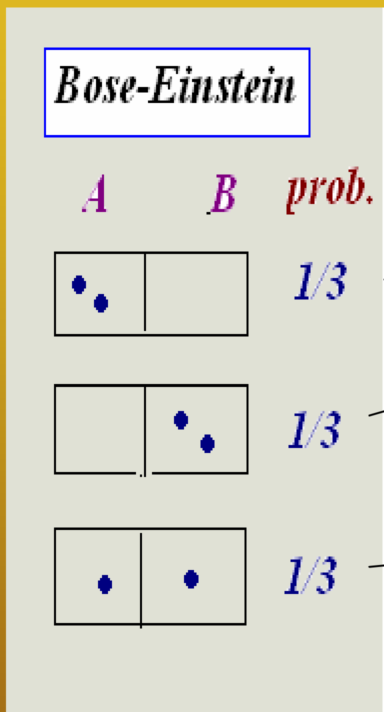
En las matemáticas ‘clásicas’, la indiscernibilidad de “elementos distintos” solamente puede existir relativamente a una dada estructura



- **Ejemplo:** el grupo aditivo de los enteros, G = <Z,+>
- Los automorfismos de G:
  - la función identidad $i(x) = x$
  - la función "elemento opuesto": $h(x) = -x$ De este punto de vista, 3 y -3 son indiscernibles en G.
- Pero, "vistos de fuera", no lo son por cierto.



El "ardil cuántico"



$$\Psi_{\boldsymbol{ab}} = \psi_{\boldsymbol{A}}(a)\ |\psi_{\boldsymbol{A}}(b)$$

$$\Psi_{\boldsymbol{ab}} = \psi_{\boldsymbol{B}}(a)\ \psi_{\boldsymbol{B}}(b)$$

$$\boldsymbol{\Psi_{ab} = \psi_A(a)\ \psi_B(b) + \psi_A(b)\ \psi_B(a)}$$

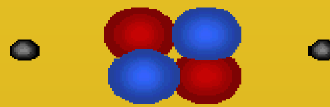
Permutaciones no son observables.

$$<\psi|Q|\psi> = <P\psi|Q|P\psi>$$

El Postulado de la a Indistinguibilidad equivale a asumir la línea de Weyl.

- En el formalismo de la mecánica cuántica, dejamos la lógica y la matemática tradicionales intactas.
- Hacemos uso de la *línea de Weyl* para dar cuenta de la invarianza por permutaciones (escoja de vectores o funciones simétricos u ante-simétricos).

Un ejemplo: el átomo de Helio



- El Hamiltoniano : rotulamos las partículas y después hacemos uso de la línea de Weyl.

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_1^2 - \frac{2e^2}{r_1}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_2^2 - \frac{2e^2}{r_2}\right) = 2H_0 \qquad (Z = 2).$$

  - **"The coordinates of the electrons are labeled 1 and 2 under <u>the provisional assumption</u> that the particles are in principle distinguishable. Of course, we know that <u>this assumption is false</u> but (…) with this assumption we can obtain the entire spectrum of the two-electron system."**

- **(E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 2nd. Ed., John Wiley, 1970, pp. 442-3)**

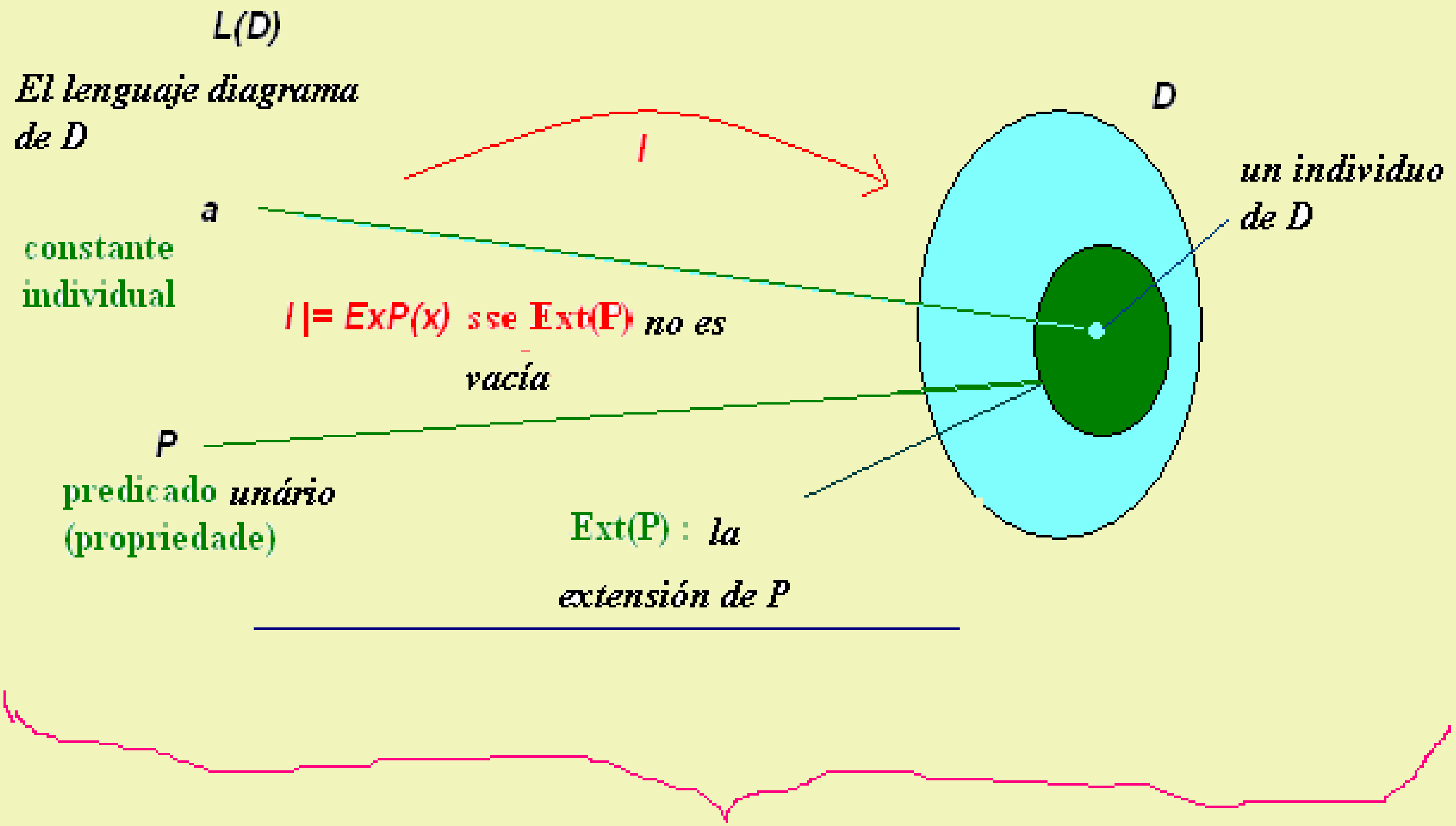
- Pero ese facto aparentemente no interfiere en la física.
- Así, aceptar la línea de Weyl parece no ocasionar problemas para la física.
- Y de facto parece cierto, porque la física funciona mucho bien.
- Así, ¿”que problemas pueden haber?

- En la lógica clásica, si $\exists x A(x)$ es “verdadero”, entonces *existe* un x tal que A(x).
- Y ese x puede ser nombrado, identificado.
- Es un individuo.

¿Qué eso significa?

¿Qué implicaciones tiene?

La semántica “clásica”

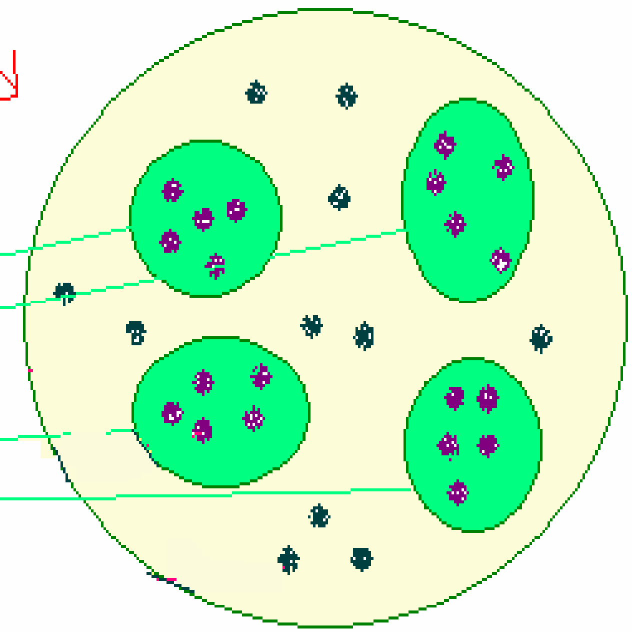


Eso todo es hecho en alguna metamatemática (en general, pudemos suponer que es la teoría de conjuntos ZF

Una supuesta “semántica cuántica”

Suponga que hay un lenguaje para la física cuántica

Interpretación



El predicado F dice informalmente que hay 5 eletrones con spin UP en una cierta dirección.

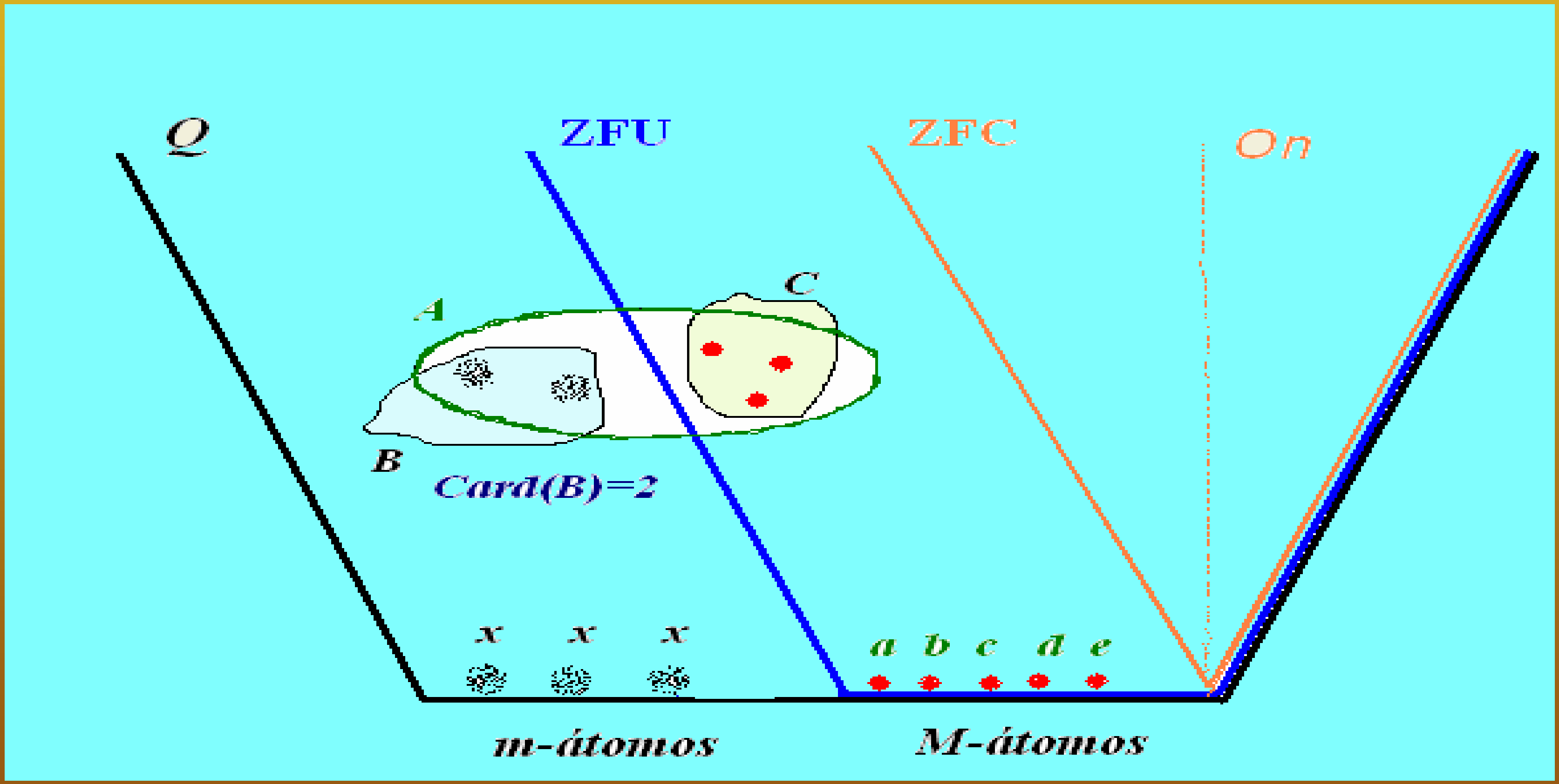
La extensión de F no queda bien definida

Cualquier colección con 5 eletrones puede ser tomado como representando la extensión de F

? Que estructuras son esas? Donde son construidas?

- Aparentemente, debemos pensar en una teoría matemática que permita tratar colecciones de no-individuos sin hacer uso de condiciones *ad hoc* (asumir la línea de Weyl).
- Ese es el propósito de la teoría de casi-conjuntos.

La idea general de los casi-conjuntos



La teoría *Q*

- Teoría de primera orden *sin* identidad.
- Símbolos primitivos: Los conectivos lógicos usuales, los cuantificadores, símbolos auxiliares, variables individuales, que denotaremos por x, y, z….
- El símbolo de identidad '=' no es un símbolo primitivo.
- Los símbolos específicos
- -predicados 1-arios: m, M y Z (micro-objetos, macro-objetos, conjuntos)
- -una constante individual: $\varnothing$ (el vacío)
- -predicados 2-arios: $\in$ y $\equiv$ (pertinencia, indistinguibilidad)
- -símbolo funcional 1-ario: qc (casi-cardinal)
- Las variables individuales, la expresión "$\varnothing$" y las de la forma $qc(x)$ son los términos de la lenguaje.
- Las formulas atómicas son $m(x)$, $M(x)$, $Z(x)$, $x\equiv y$ y $x\in y$.
- Las otras formulas son definidas de modo usual.

- Definición 1.
- $Q(x) := \neg m(x) \wedge \neg M(x)$ (casi-conjunto)
- $D(x) := M(x) \vee Z(x)$ ("*Dinge*", o objetos clásicos)
- $x =_E y := [(Z(x) \wedge Z(y) \wedge \forall w(w \in x \leftrightarrow w \in y))] \vee [(M(x) \wedge M(y) \wedge \forall w(Z(w) \rightarrow (x \in w \leftrightarrow y \in w)))]$ (identidad extensional)
- (que escribiremos "$=$")

Algunos postulados

- (Q1) Los postulados de la lógica de primera orden clásica sin identidad.
- (Q2) $\forall x \forall y (x \in y \rightarrow Q(y))$ (los átomos son vacíos, o sea, se algo tiene elementos, es un casi-conjunto).
- (Q3) $\equiv$ es reflexiva, simétrica y transitiva
- (Q4) $\forall x \forall y (x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$
- (Q5) $\forall x (\neg m(x) \vee \neg M(x))$ (nadie es al mismo tiempo un *m*-átomo y un *M*-átomo).
- (Q6) $\forall x\, (Z(x) \rightarrow Q(x))$ (todo conjunto es un casi-conjunto)
- (Q7) $\forall x \forall y ((m(x) \wedge x \equiv y \rightarrow m(y)) \wedge (x = y \wedge M(x) \rightarrow M(y)) \wedge (x = y \wedge Z(x) \rightarrow Z(y)))$
- (Q8) $Z(\emptyset) \wedge \forall y (\neg y \in \emptyset)$ (el *conjunto* vacío)

$\equiv$ y $=$

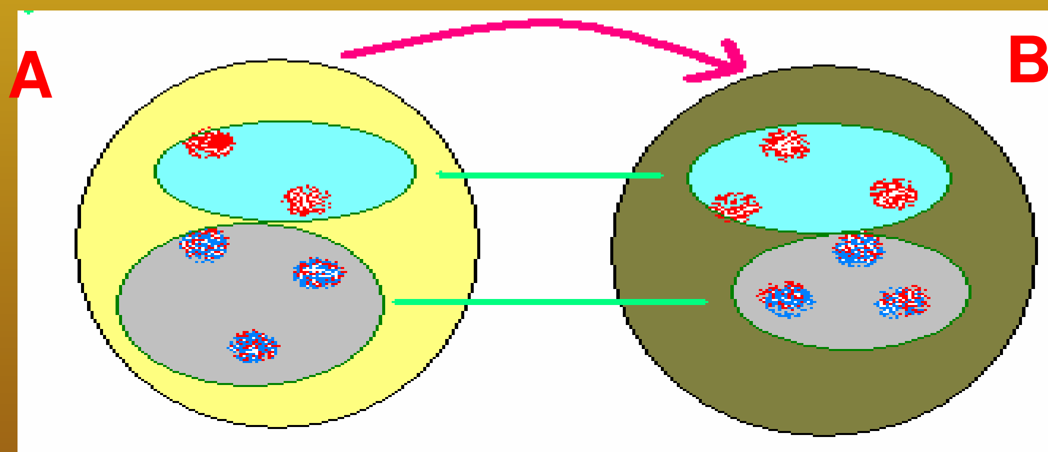
- de $x \in z \wedge x \equiv y$, no inferimos que $y \in z$
- de $z \in x \wedge x \equiv y$, no inferimos que $z \in y$
- $\equiv$ difiere de la identidad extensional, que tiene todas las propiedades de la identidade clásica.
- (Q11) $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \exists_Q \boldsymbol{z} \forall \boldsymbol{t} (\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{z} \leftrightarrow \boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{y})$ (Axioma del “Par”)
- $[x,y]$, el “par”
- $[x]$, el “unitario”

Conceptos definidos

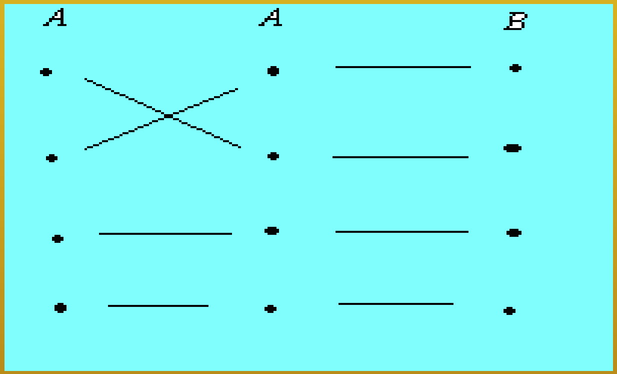
- Otros postulados permite obtener
- $[t \in x : A(t)]$ (por el esquema de la separación),
- $x \cup y$, $x \cap y$, $x - y$, $\wp(x)$, etc., como en las teorías usuales.

Casi-Relaciones y Casi-Funciones

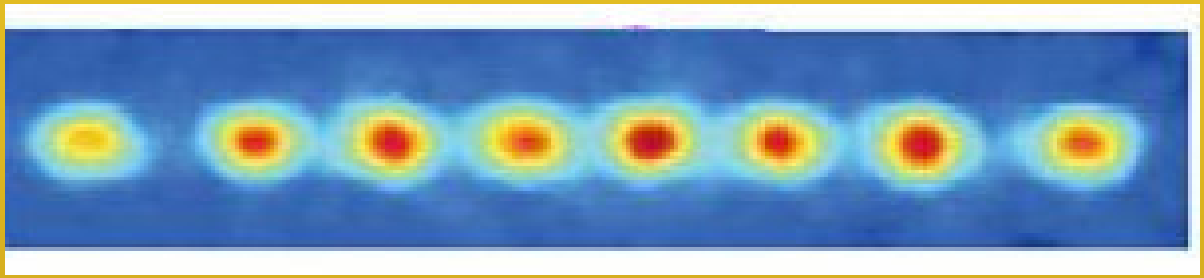
- Casi-funciones no pueden discernir entre los valores de sus argumentos:
- $\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x',y'\rangle \in f \wedge x' \equiv x \rightarrow y' \equiv y$



- Los elementos del casi-conjunto *A*, si son indiscernibles, una “permutación” entre sus elementos no lleva a una ordenación que pueda ser detectada como distinta de la original.



- Del mismo modo, si los elementos de *B* son indiscernibles de los elementos de *A*, no hay distinción aparente entre elles. Esos casi-conjuntos, teniendo la misma cantidad de elementos, serán más tarde llamados de indiscernibles



- Ocho iones de calcio en una armadilla, conocida como estado de superposición *W*. Ellos tienen sus propiedades correlacionadas (en el sentido de la mecánica cuántica). Para los efectos físicos (por ejemplo en la computación cuántica), no hay diferencia entre esa disposición o otra cualquier, obtenida por un cambio de posiciones de los iones. (*Scientific American*, Marzo de 2006).

Los postulados de los casi-cardinales

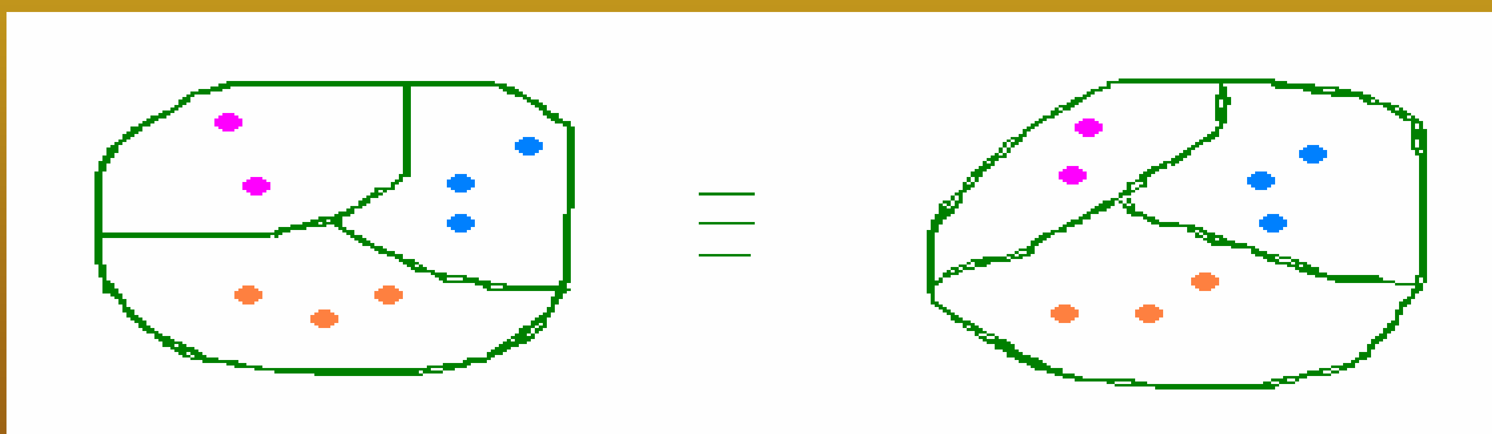
- (Q17) $\forall \boldsymbol{x}\, (\neg \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0})$
- (Q18) $\forall \boldsymbol{Qx}\, (\boldsymbol{x} \neq \varnothing \rightarrow \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0})$
- (Q19) $\forall \boldsymbol{x} \exists!\, \boldsymbol{y}\, (\boldsymbol{Cd}(\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x}) \wedge (\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{card}(\boldsymbol{x}))$
- (Q20) $\forall \boldsymbol{Qx}\, (\boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x}) = \alpha \rightarrow \forall \beta\, (\beta \leq \alpha \rightarrow \exists \boldsymbol{Qy}\, (\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{y}) = \beta)))$, para α y β ordinales, y $\leq$E definida como usual a partir de =E.
- (Q21) $\forall \boldsymbol{Qx} \forall \boldsymbol{Qy}\, (\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x}))$
- (Q22) $\forall \boldsymbol{Qx} \forall \boldsymbol{Qy}\, (\boldsymbol{Fin}(\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{y} \subset \boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{y}) < \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x}))$
- (Q23) $\forall \boldsymbol{Qx} \forall \boldsymbol{Qy} (\forall \boldsymbol{w}\, (\boldsymbol{w} \notin \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{w} \notin \boldsymbol{y}\,) \rightarrow \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x} \cup \boldsymbol{y}\,) = \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{y}))$
- (Q24) $\forall \boldsymbol{Qx}\, (\boldsymbol{qc}(\wp(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\ \hat{}\ \boldsymbol{qc}(\boldsymbol{x}))\,)$

Definiendo cardinales

- Domenech y Holik: una variante de la teoría donde los casi-cardinales pueden ser definidos sin hacer recurso a ordinales.
- A. Sant'Anna tiene otra forma de solución.
- Definieran "espacios lineales indiscernibles" y obtuvieran interesantes resultados que pueden ser llevados a la sistematización de la mecánica cuántica sin que se tenga que suponer cualquier forma de individuación de los quanta.

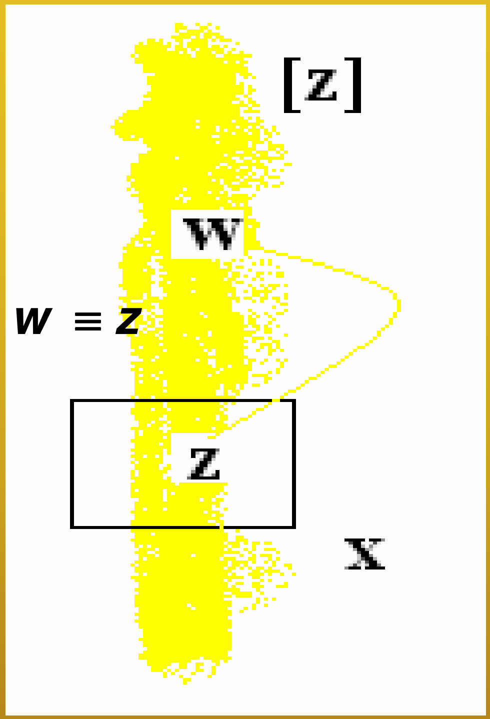
La extensionalidad débil

- (Q25) $\forall Qx \forall Qy((\forall z\,(z \in x/\!\equiv\ \rightarrow \exists w\,(w \in y/\!\equiv\ \wedge\ qcsim(z,w)))) \wedge (\forall w\,(w \in y/\!\equiv\ \rightarrow \exists z\,(z \in x/\!\equiv\ \wedge\ qcsim(w,z))) \leftrightarrow x \equiv y).$



Permutaciones

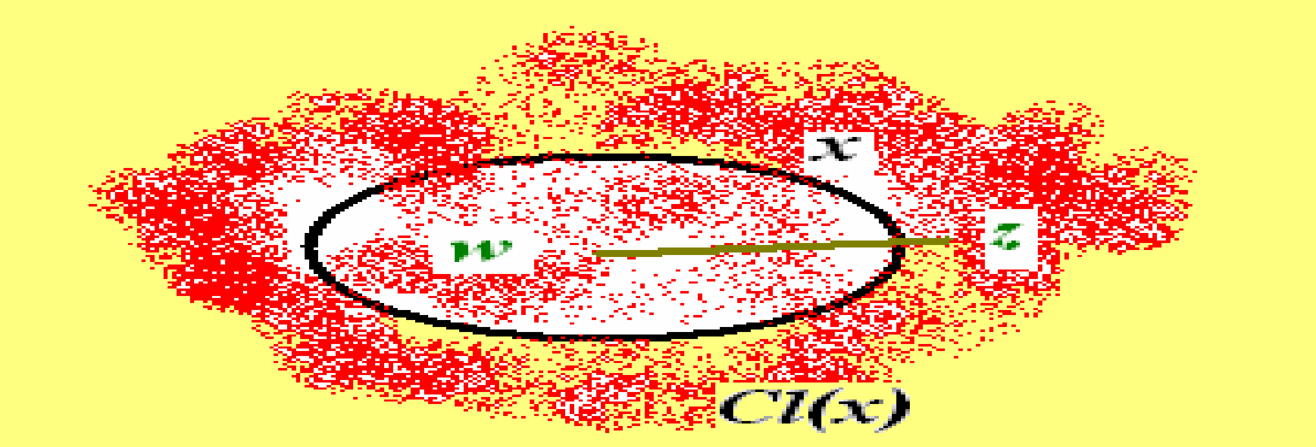
- El unitario fuerte de x: *xu*
- $xu \subseteq [x] \wedge qc(xu) = 1.$



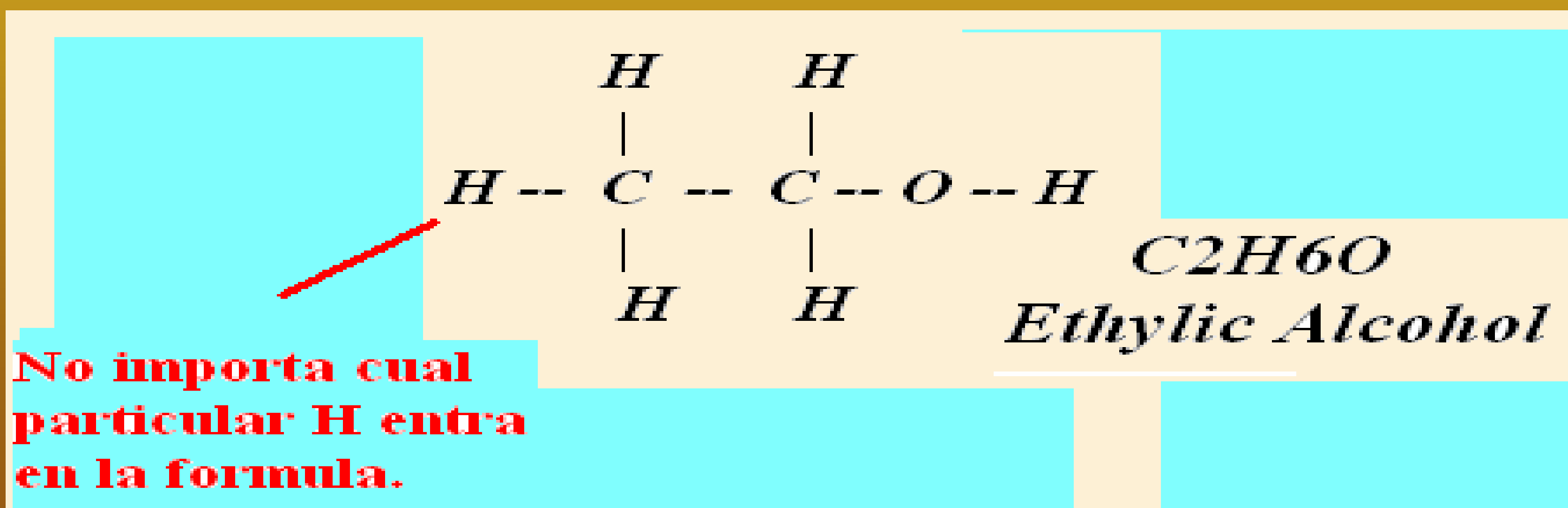
Mismo si $x \equiv y$, *no se puede* probar que $xu=yu$, porque para eso necesitamos la identidad. Tenemos solamente que $xu \equiv yu$.

- **Teorema** **Si x es un casi-conjunto finito tal que $x \neq [z]$, siendo z un m-átomo que pertenezca a x, entonces si $w \equiv z$ y $w \notin x$, existe un unitario fuerte wu de w tal que**
  - $(x - zu) \cup wu \equiv x.$

- Teorema: Si R es una casi-relación (otra que la pertinencia) y R(x,y), entonces si $x' \equiv x$ y $y' \equiv z$, tenemos que R(x',y').
- La nube de un casi-conjunto *x* (son los elementos "potenciales" de *x*.
- Cl(x) = **[z : ∃w(w∈ x ∧ w ≡ *z*]**



- Eso permite una respuesta alternativa a los reclames de una versión del “realismo estructural ontológico” de que tudo lo que hay son estructuras,
- … y debe haber relaciones sin los relata.
- En Q, obtenemos relaciones que cumplen el teorema anterior
- R(x,y) y $x' \equiv x$ y $y' \equiv z$, entonces R(x’,y’)
- Así, podemos tener relaciones sin los “particulares” relata, como en la química:



- “en el estudio de los fenómenos que no pertenecen al dominio macroscópico, el método más apropiado consiste no en crear nuevas lógicas (cuánticas o otras), pero en hacer uso de reglas predictivas formuladas dentro del dominio de la lógica universal convencional” (d’Espagnat 2006, p. 261)
- Pienso que la actitud del filósofo debe ser exactamente la opuesta: explorar las posibilidades, como sugirió Hilbert en 1900.
- El análisis técnico (lógico, matemático) de las diversas *metafísicas* posibles me parece algo lícito y mismo necesário.

- **MUCHAS GRACIAS**