

Identidade e Individualidade em Física Quântica

Questões Lógicas

Décio Krause

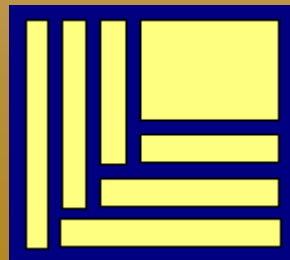
Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência-
UFSC/CNPq

Departamento de Filosofia

Universidade Federal de Santa Catarina

1a Jornada de Filosofia da Mecânica Quântica

UFMG – Dezembro 2006

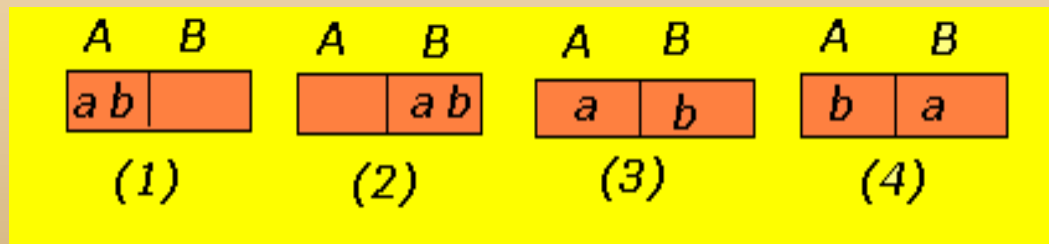


UFSC

Mecânica Clássica

- Estatística de Maxwell-Boltzmann

- (cada situação física pode ocorrer com mesma probabilidade = $\frac{1}{4}$)



- Mesmo as duas partículas sendo fisicamente indiscerníveis, as situações (3) e (4) são distintas, o que leva à hipótese de que elas são *indivíduos*.
- Essa “individualidade” é dada por algo *para além* dos atributos, que podem ser todos partilhados, com a exceção da localização espaço-temporal. O que então faz de uma partícula “clássica” um indivíduo? (alguma forma de *substratum*, *haecceity*, *primitive thisness*, ...)

A indiscernibilidade

- **Planck 1900:** seguindo a trilha de Kirchoff, Boltzmann, Wien, Reyleigh e Jeans, chegou à lei da radiação do corpo negro, e descreveu um modo de distribuir P elementos de energia entre N osciladores, obtendo

$$W = \frac{(N + P - 1)!}{P! (N - 1)!}$$


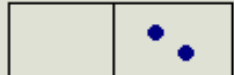

(não há distinção entre os quanta)

- **Faça $N = 2$ e $P = 3$ para obter $W = 4$**

N_1	N_2
○ ○ ○	
	○ ○ ○
○ ○	○
○	○ ○

- **Ehrenfest:** percebeu a importância metafísica dessa hipótese – a *indiscernibilidade* dos elementos de energia.
- **Born:** “se os fótons fossem tratados como partículas genuínas, tendo individualidade, a lei de Planck não teria sido obtida.”(1943)
- **Bose, Einstein:** levaram essa contagem à matéria (estatística B-E)
- **Heisenberg:** a individualidade é “perdida”
- **Schrödinger :** o conceito de identidade não tem sentido
- **Mesmo hoje:** “física *de partículas*”, aceleradores....tudo para lidar com certas *entidades quânticas* – há uma objetividade
- **Levy-Leblond :** “Quantons”
- **M. Bitbol:** “novas ontologias”

O 'truque' quântico

<i>Bose-Einstein</i>		
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>prob.</i>
		<i>1/3</i>
		<i>1/3</i>
		<i>1/3</i>

$$|\Psi_{ab}\rangle = |\Psi_A(a)\rangle |\Psi_A(b)\rangle$$

$$|\Psi_{ab}\rangle = |\Psi_B(a)\rangle |\Psi_B(b)\rangle$$

$$|\Psi_{ab}\rangle = |\Psi_A(a)\rangle |\Psi_B(b)\rangle + |\Psi_A(b)\rangle |\Psi_B(a)\rangle$$

invariante por uma troca dos rótulos *a* e *b*

Permutações não são observáveis.

$$\langle \psi | Q | \psi \rangle = \langle P\psi | Q | P\psi \rangle$$

O Postulado da Indistinguibilidade

Objetividade das Teorias Físicas

Como tratar de “objetos” indiscerníveis (sejam eles partículas, campos, etc.)

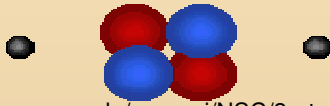
São as *entidades* às quais as teorias físicas supostamente se referem

“Se digo que no espaço e no tempo tanto a intuição dos objetos externos como a da própria mente representa ambos segundo o modo como afetam os nossos sentidos, isto é, como *aparecem*, não quero com isso dizer que esses objetos sejam uma simples *ilusão*.”
(I.Kant, *Crítica a Razão Pura*, 2a. ed. p.69)

“(…) as pessoas rejeitam os objetos quânticos porque eles são diferentes, mas todos os seus argumentos mostram que o que não há no domínio quântico são objetos como os clássicos, não que não há objetos quânticos.”

(Auyang, S. Y. *How is quantum field theory possible?* Princeton Un. Press, 1995, p. 5)

A abordagem usual: os fins justificam os *métodos*



<http://web.jjay.cuny.edu/~acarp/NSC/3-atoms.htm>

O átomo de Helio consiste de 2 elétrons e de um núcleo formado por dois prótons e dois neutrons. Não há diferenças entre as entidades de mesma espécie.

O estado fundamental

O hamiltoniano é

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{2e^2}{r_1} \right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 - \frac{2e^2}{r_2} \right) = 2H_0 \quad (Z = 2).$$

Os sub-índices 1 e 2 referem-se aos elétrons 1 (?) e 2 (?)."

<http://tesla.phys.unm.edu/phy537/11/node4.html>

“The coordinates of the electrons are labeled 1 and 2 under the provisional assumption that the particles are in principle distinguishable. Of course, we know that this assumption is false but (...) with this assumption we can obtain the entire spectrum of the two-electron system.”

(E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 2nd. Ed., John Wiley, 1970, pp. 442-3)

A base lógico-matemática de uma teoria física

- $T = \langle F, M \rangle$

- F = uma espécie de estruturas (Bourbaki) ou predicado de Suppes.
- M = classe dos modelos de T .
- Exemplo 1: Teoria de Grupos
 - $\mathcal{G}(x) =_{\text{D}} \exists G \exists * (G \neq \emptyset \wedge * \in \wp(G \times G \times G) \wedge \text{“axiomas de grupo”})$
- Modelos: os grupos
- Exemplo 2: Mecânica de Partículas (MacKinsey, Sugar e Suppes 1953)
 - modelo = $\langle P, T, s, m, f, g \rangle$
- Axiomas das teorias usuais:
 - Lógicos – lógica clássica de primeira ordem com igualdade
 - Matemática – uma teoria de conjuntos como ZF
 - Específicos – dependem da teoria particular, mas em ZF ampliada.
 - Modelos: estruturas conjuntistas
- (há alternativas via categorias, lógicas de ordem superior, etc. que não mudam o problema básico da *individualidade* das entidades dos domínios dos modelos: todas são indivíduos).

MQ não relativística: formulação padrão (simplificada)

- **Conceitos primitivos:** *sistema físico, estado* (de um s.f.) e *observável*.
- **Postulados** (dão o “predicado de Suppes” da MQ)
 - 1) Um estado de um s.f. é representado por um vetor unitário $|\psi\rangle$ em um espaço de Hilbert complexo H .
$$|\psi\rangle = \sum_i \langle \alpha_i | \psi \rangle. |\alpha_i\rangle = \sum_i c_i |\alpha_i\rangle, \text{ com } \sum_i |c_i|^2 = 1$$
 - 2) A evolução temporal do estado é governada pela equação de Schrödinger $i\hbar. \partial|\psi\rangle/\partial t = H|\psi\rangle$.
 - 3) Um observável é representado por um operador auto-adjunto A sobre H . O espectro de A é o conjunto dos valores possíveis de serem obtidos em uma medição de A – *autovalores* de A (os c_i tais que $A|\alpha_i\rangle = c_i.|\alpha_i\rangle$, para $|\alpha_i\rangle \neq 0$).
 - 4) A quantidade $|c_i|^2$ é a probabilidade de que o autovalor c_i (em $A|\alpha_i\rangle = c_i.|\alpha_i\rangle$) seja observado na medida de A para o sistema no estado $|\psi\rangle$ (Regra de Born).

Interpretação e Modelos

(estruturas que satisfazem o predicado)

• $M = \langle F, S, \{Q_i\}, f \rangle$, onde

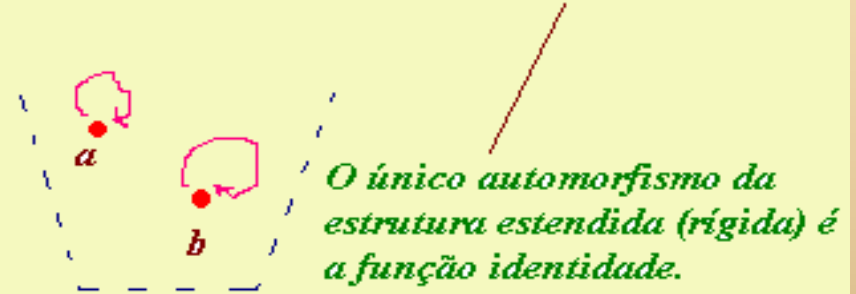
- - F é um modelo da análise funcional clássica
- - S é a coleção dos sistemas físicos (formam um “conjunto”?)
- - $\{Q_i\}$ é uma coleção de *quantidades físicas* definidas nos subconjuntos de S (uma delas, Q_0 , representa a quantidade física “tempo”)
- - f é a função “interpretação”, definida convenientemente. Por exemplo, associa a cada $s \in S$ um espaço de Hilbert H em F , bem como certos operadores em H (por ex., projeções) para estados de S .
- - etc.
- **O que importa:** tratam-se de estruturas conjuntistas (p.ex., em ZF)

Um automorfismo de \underline{e} é uma função bijetiva $h : D \rightarrow D$ tal que $x \underline{r} y$ implica $h(x) \underline{r} h(y)$ para toda relação \underline{r} de \underline{e} (de qualquer aridade).

Indiscernibilidade em uma estrutura



Estendendo \underline{e} a uma estrutura rígida.



os indivíduos \underline{a} e \underline{b} podem agora ser discernidos.

$$\underline{e} = \langle D, r_i \rangle$$

os indivíduos \underline{a} e \underline{b} são invariantes pelos automorfismos de \underline{e}

\underline{a} e \underline{b} são indiscerníveis em \underline{e}

Teorema (ZF): Toda estrutura pode ser estendida a uma estrutura rígida.

O universo conjuntista.

$$V = \langle V, \varepsilon \rangle$$

é uma estrutura rígida

Exemplo

O anel dos inteiros $E = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ tem como únicos automorfismos a função identidade $i(x) = x$ e a função $h(x) = -x$.

Do ponto de vista de E , 2 e -2 são indiscerníveis.

- Podemos estender $E = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ a uma estrutura rígida por exemplo adicionando a ela os conjuntos unitários dos elementos de \mathbb{Z} , obtendo

$$A = \langle \mathbb{Z}, +, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \dots \rangle$$

Agora, todos os indivíduos de \mathbb{Z} podem ser discernidos uns dos outros pela “propriedade” *ser igual a x* , que pode ser escrita assim: $I(y) = \text{D } y = x$

- que corresponde a $y \in \{x\}$.

O fato

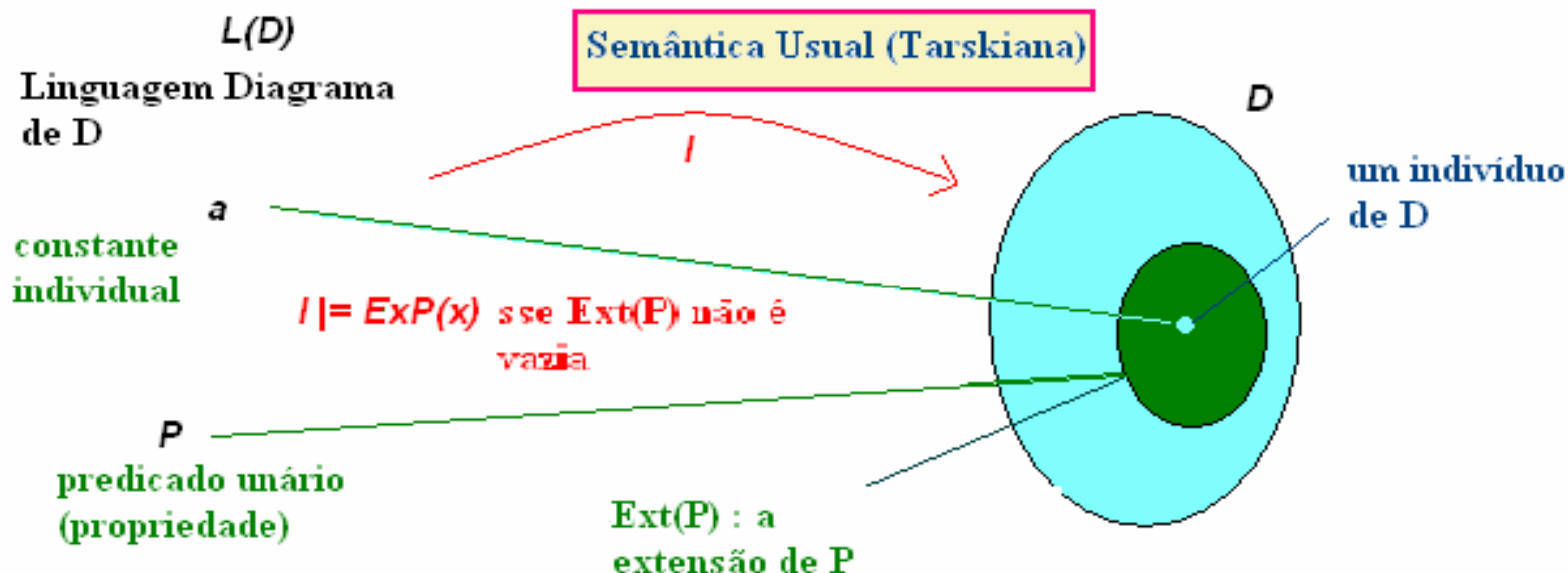
- Quando usamos condições de simetria, isso equivale a nos mantermos no “interior” de uma estrutura. Só há indiscernibilidade relativa a uma estrutura.
- Uma estrutura adequada para a MQ deveria ser tal que não pudesse ser estendida a uma estrutura rígida – tem que mudar a base matemática ?

Outro problema: a linguagem

- **Yuri I. Manin:** “quantum mechanics does not have its own language (...) to describe a physical system S , (...) [it] uses a certain fragment of the language of functional analysis ‘oriented on describing S ’ “. (*A course in Mathematical Logic*, Springer-Verlag 1977, p. 84)
- Se usarmos a linguagem da matemática usual, usamos a da lógica usual, em particular os quantificadores da lógica usual.
- Como entender expressões como “Há (existe) um quanta assim e assim”, em símbolos, $\exists \mathbf{x} F(\mathbf{x})$?
- A semântica desses conceitos não pode ser a usual.
- Um problema: o uso de *nomes*. Qual o significado do nome “Priscilla” dado a um pósitron que ficou aprisionado por três meses nos experimentos do Prêmio Noel Hans Dehmelt?
- (adianto que o uso de tais nomes *não* fazem desse pósitron um *indivíduo*).

Semântica conjuntista usual

(ZF como metamatemática)



"Aprendemos a ler 'Ex' como 'existe um x tal que'. Considerada como uma frase do português, tem conotação existencial. Assim, pode parecer natural que 'Ex' também tenha." (de S. Lavine, Synthese 2000).

Tudo isso é feito em alguma metamatemática (como ZF).

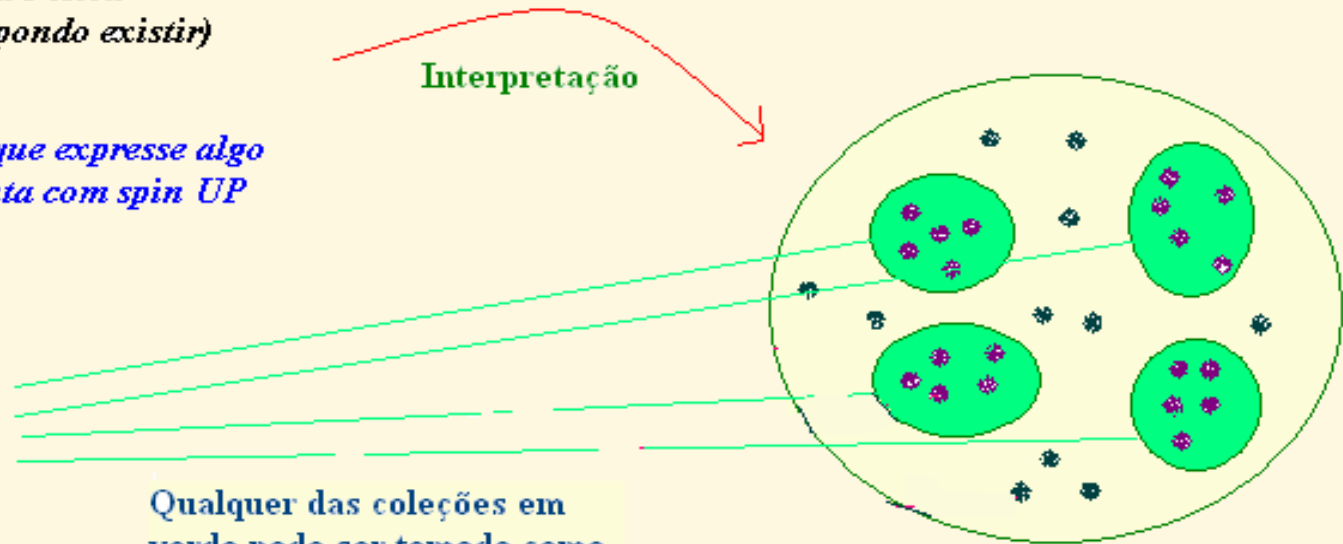
Semântica de uma “linguagem quântica” (se há uma): características

Linguagem da Física Quântica (supondo existir)

Um predicado F que expresse algo como "Há 5 quanta com spin UP na direção z "

A extensão desse predicado não está bem definida.

Interpretação



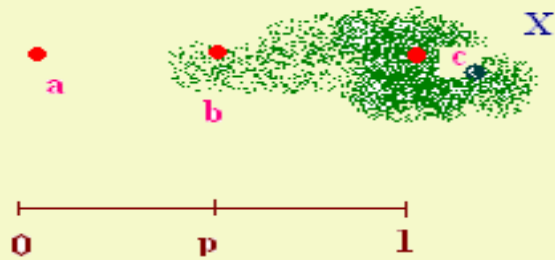
Qualquer das coleções em verde pode ser tomada como sendo a extensão de F .

As coleções de quanta indiscerníveis não obedecem os postulados das teorias usuais de conjuntos.

Qual seria a metamatemática adequada para formular essa semântica?

Conjuntos "fuzzy" vs. "conjuntos quânticos"

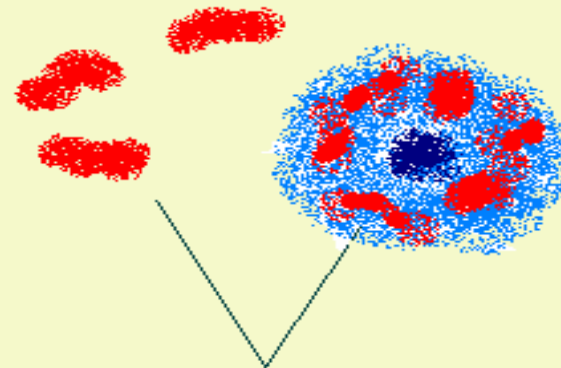
Um conjunto fuzzy e três indivíduos.



$$\begin{aligned} a &\in^0 X \\ b &\in^p X \quad 0 < p < 1 \\ c &\in^1 X \end{aligned}$$

Se a e c são distintos, uma permutação entre eles altera o conjunto X .

Um "conjunto quântico" (um átomo)



É indiferente quais são os quanta (de mesma espécie) que "pertencem" ao átomo. Mas alguns deles "pertencem" e outros não, não havendo meio termo.

*Também pouco importa como eles são representados (partículas, ondas,...).
A referência a "eles" é feita necessariamente, sejam o que forem.*

No formalismo, essa referência é feita pelo uso de variáveis, ao estilo Quine.

*Mas, nesse caso, o que há são entidades sem identidade:
"Entity, but no identity."*

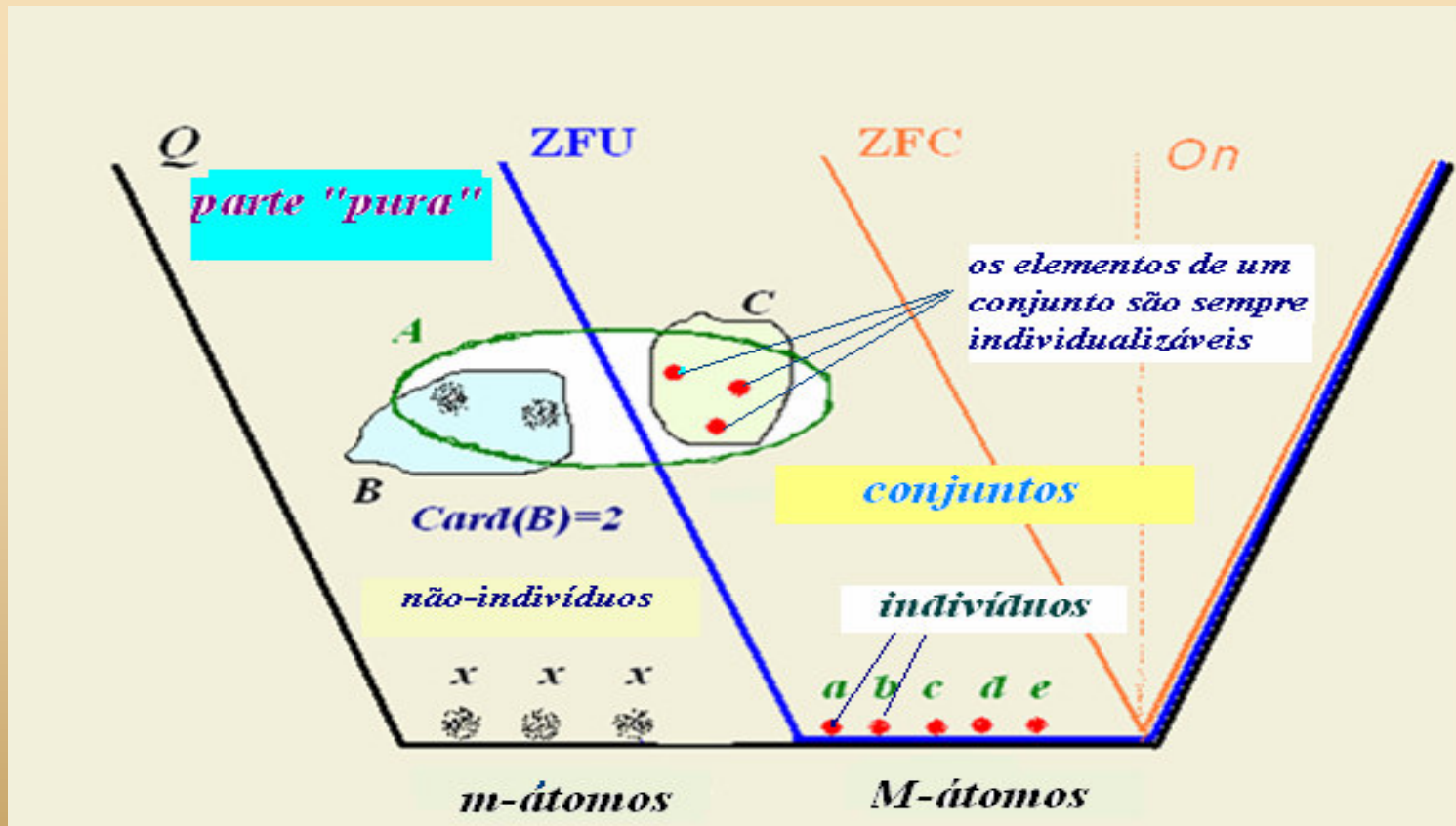
Justificativa

- Busca por uma abordagem que leve em conta os “objetos físicos” dos quais se está tratando, vistos como *não-indivíduos*.
- E que eles sejam caracterizados com o menor número possível de “truques”, visando que possuam as propriedades a eles aferidas pela teoria (por exemplo, a não-individualidade).
- Essa idéia segue a de Heinz Post (1963), para quem a indiscernibilidade deveria ser algo a ser assumido “right from the start”, e não *feita posteriormente* por suposições ad hoc.
- A indiscernibilidade é tomada como primitiva. Formalmente, é uma relação de equivalência, mas o conceito de identidade não faz sentido para as entidades que se considera.
- Apenas na metalinguagem (é que podemos falar de “este” e “aquele”, mas isso não tem sentido na linguagem objeto).
- Georg Berkeley: “We ought to 'think with the learned, and speak with the vulgar' “; *Of the Principles of Human Knowledge*, §51.

A teoria de quase-conjuntos

- Trata-se de uma teoria (ao estilo de uma teoria de “conjuntos”) para lidar com coleções de objetos que podem ser indiscerníveis.
- A principal motivação vem da física quântica.
- Em 1974, a American Mathematical Society organizou um congresso para discutir e avaliar o que tinha sido feito relativamente aos 23 Problemas da Matemática propostos por Hilbert em 1900.
- Uma das coisas interessantes é que saiu uma *nova lista* “*Problems of Present Day Mathematics*”.
- O primeiro problema foi formulado pelo físico Yuri Manin, atualmente diretor do Instituto Max Planck em Bonn.

- Manin questiona o “paradigma da teoria cantoriana de conjuntos” (segundo a qual um conjunto é uma coleção de objetos *distintos* uns dos outros) para dar conta das coleções de objetos com os quais trabalha a física quântica.
- Independentemente, Maria Luisa Dalla Chiara e Giuliano Toraldo di Francia, de Florença, propuseram uma teoria de *quasets* para tratar de questões semânticas envolvendo a linguagem da física quântica.
- Eles também salientaram que coleções de quanta indiscerníveis não obedeceriam os postulados das teorias usuais de conjuntos (final dos anos 70).
- De modo também independente, Newton da Costa propôs, em 1980, a criação de uma teoria de *quase-conjuntos* para fundamentar uma semântica para as “lógicas de Schrödinger” que descreveu (nas quais o conceito de identidade não se aplica para todos os objetos do domínio).



- O nome da teoria vem da sugestão de da Costa. Ela foi desenvolvida por D.Krause em 1990 e em diante (inicialmente, sem conhecer os trabalhos de Manin e dos italianos). Outros colaboraram depois, como Dalla Chiara, R. Giuntini, A. Sant'Anna e A. Sartorelli.
 - Toda a história está contada em
 - French, S. and Krause, D., *Identity in Physics: A Historical, Philosophical, and Formal Analysis*, Oxford, Oxford Un. Press, 2006.
-