

¿Que son las lógicas paraconsistentes?

Décio Krause

Departamento de Filosofia
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, SC – Brasil
www.cfh.ufsc.br/~dkrause

Buenos Aires, 6 Junio 2007



Grupo de Estudos em Lógica e
Fundamentos da Ciência UFSC/CNPq



UFSC

Lógica y lógicas

- **Kant (1787)**: la lógica queda “acabada” con el trabajo de Aristóteles.
- Ciertamente él desconocía la lógica de los megáricos y de los estóicos, que llegaron a lo que hoy llamamos de “cálculo de proposiciones clásico”
- **El siglo XIX** vio los trabajos de Boole, De Morgan, Peirce (la era booleana), Frege, Russell y otros (la era de Frege) que llevaran la lógica para próximo de la matemática.
- **Hoy, en gran medida, “lógica” es “lógica matemática”.**
- **Hay que distinguir entre “lógica” como disciplina y “lógica” como un sistema lógico particular.**

Siglo XX

- El nacimiento de las lógicas no-clásicas
- Un cuadro general (puramente didáctico):
- **Lógicas No-Clásicas**
- Lógicas “complementares a la clásica: **no alteran los esquemas y las reglas de la lógica clásica, pero las aumentan en capacidad de expresión.**
- - Modales, Deónticas, Temporales, Doxásticas (creencia)
- Lógicas “rivales” o heterodoxas: **alteran esquemas o reglas de la lógica clásica.**
- - No-Reflexivas, Paraconsistentes (polivalentes, intuicionista), Paraconsistentes.
- - Lógicas Intensionales, Lógica Cuántica, Lógicas *Fuzzy*, Lógicas Lineales, etc.
- Atención con esa clasificación: **las lógicas paraconsistentes (por ejemplo) son también complementares a la clásica.**

El Principio de la No-Contradicción (PNP)

“el más seguro de todos los principios” (Γ 1005b 22-23)

- Hay varias formulaciones, no equivalentes:
- **Lukasiewicz:** las formulaciones:
- **ontológica** (Γ 1005b.19,10) “Es imposible que simultáneamente y según la misma relación el mismo atributo pertenezca a lo mismo”.
- **lógica** (Γ 1011b.13,14) “Las proposiciones opuestas no pueden ser verdaderas al mismo tiempo”.
- “y **psicológica** (Γ 1005b.23,24) “Es imposible concebir que la misma cosa sea y no sea.”
- - Entre dos proposiciones contradictorias (una de ellas cuales es la negación de la otra), una de ellas es falsa.
- **Algunos conceptos:**
- α y $\neg\alpha$ proposiciones contradictorias
- $\alpha \wedge \neg\alpha$ una contradicción
- (en la lógica clásica siempre se puede formar la conjunción de dos proposiciones)
- $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

- En 1910 y 1911, Lukasiewicz y Vasiliev, de forma independiente, percibieron que lógicas “no-aristotélicas” podrían ser desarrolladas, contrariando el principio de la non contradicción (PNC).
- **Vasiliev:** las *lógicas imaginarias* (silogística); él supuso mundos posibles donde los principios aristotélicos no fuesen válidos (en especial el PNC), pero desarrollo sus ideas en profundidad (hoy están siendo retomadas por Bazhanov en Rusia).
- **Lukasiewicz:** no elaboro cualquier sistema, pero influenció su discípulo Stanislaw Jaskowski.

El problema de las contradicciones en la lógica clásica y en las lógicas en general

$$\bullet \alpha \wedge \neg \alpha \rightarrow \beta$$

- la **regla de Scotus**, el “*ex falso sequitur quodlibet*”
- 1. α
- 2. $\neg \alpha$
- 3. $\alpha \wedge \neg \alpha$ conjunción
- 4. $\alpha \wedge \neg \alpha \rightarrow \beta$
- 5. β de 1-4 por modus ponens
- O sea, dos tesis contradictorias permiten que se deduzcan todas las fórmulas como teoremas.

- Def.: Una teoría (un conjunto Γ de proposiciones cerrado por deducciones) es *inconsistente* si tiene dos teoremas contradictorios .
- Def.: Una teoría Γ es *trivial* ssi $\Gamma \vdash \beta$ para cualquier β .
- De acuerdo con la lógica clásica, una teoría es inconsistente syss es trivial.

- **1938 Jaskowski:** las lógicas discussivas (o discursivas): motivado en sistematizar teorías que (supostamente) contienen contradicciones (expresiones de la forma $\alpha \wedge \neg \alpha$), como la dialéctica, y también con el estudio de teorías conteniendo contradicciones causadas por conceptos vagos.
 - – sus sistemas son solamente al nivel del cálculo de proposiciones
- **1953 Asenjo:** lógica de las antinomias (no publicada): las antinomias son “realidades lógicas” que no pueden ser tratadas con la lógica aristotélica. Presenta sus ideas en un artículo solamente en 1964.
- **1949/1959 Nelson:** relaciona la negación y el concepto e constructibilidad, quedando restricto a la aritmética – aparentemente, él no percibió el alcance de una extensión de sus lógicas.
 - Su sistema tiene un alcance limitado y no parece almejar aplicaciones fuera del intuicionismo u del pensamiento constructivo.
 - Los sistemas de Nelson están sendo estudiados y fueran extendidos por Akama en Japón. Un facto: hoy, hay que se considerar los trabajos del lógico japonés cuando se habla de las lógicas de Nelson.

La idea general (y informal) de las LP

- **Primera Idea:** Las LP son tomadas simplemente como lógicas que derogan el PNC.
- O sea, pueden tener tesis contradictorias, como α y $\neg\alpha$, y entonces, en gran parte de las lógicas, también $\alpha \wedge \neg\alpha$.
- Y entonces $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ –el PNP- es “falso”.
- Pero entonces, si $\alpha \wedge \neg\alpha$ es “verdadera”, la ley $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$ (la regla de Scotus, o “Ex falso sequitur quodlibet”) debe ser “falsa”, pues β puede ser una proposición cualquier, incluyendo una falsa.

- $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$

V F F

- Pero hay sistemas en que se tiene respectado el PNC pero no la RS, como en el cálculo minimal de Johanson-Kolmogorov.
- $M \vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
- $M \vdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ (una contradicción implica la negación de una fórmula cualquier), pero la RS no es válida.
- **Segunda Idea:** las LP son lógicas que pueden ser base de teorías inconsistentes pero no triviales.
- Debemos tener α y $\neg\alpha$ (y en general $\alpha \wedge \neg\alpha$) (tesis contradictorias)
- Y también debe haber β que no es una tesis. (no trivialidad)
- Por otro lado, si bloqueamos la RS, entonces podemos tener tesis contradictorias sin trivialización, pues de α y $\neg\alpha$ no más se infiere cualquier proposición.
- Pero si tenemos tesis contradictorias (se hay un conectivo \wedge tendremos una contradicción), el PNP es falso.

Entonces...

- Una lógica es paraconsistente si
 - (i) deroga el PNC
 - (ii) limitan la aplicabilidad o violan la *Regla de Scotus*.
 - (iii) pueden ser lógicas que hacen las dos cosas.
- De manera general: una lógica es paraconsistente si puede ser la lógica subyacente de teorías inconsistentes pero no triviales.

¿Donde pueden ser usadas?

- En “situaciones de conflictos”
- En la computación : bases de datos inconsistentes
- En el derecho, en la lógica de las normas (Vernengo, von Wright...)
- En la ética
- En la antropología
- **En la ciencia**
- A) la teoría del átomo de Bohr, que junta la mecánica clásica, incluyendo la teoría electromagnética clásica, con la cuantización, que (se dice) son incompatibles.
- B) En posibles “unificaciones” de teorías que son lógicamente incompatibles: (¿de la teoría general de la relatividad y la mecánica cuántica?)
- **En la tecnología**
- **En las matemáticas**
- **En la filosofía.**

Los trabajos de Vasiliev, Jaskowski, Asenjo, Nelson fueran muy restrictos, y ninguno de ellos llegó a pensar en una lógica más fuerte que pudiese servir de base a teorías más fuertes (inconsistentes pero no triviales) de las matemáticas y de las ciencias.

Newton da Costa: primeras ideas en 1954 y 1958.

En 1963, presenta una infinidad de sistemas (las jerarquías de da Costa) que pueden basar teorías fuertes (para la matemática y la física) que sean inconsistentes pero no triviales.

- Sistemas proposicionales, cuantificacionales, con descripciones.
- Después: teorías de conjuntos, versión categorial, etc.
- Vamos entender la jerarquía de cálculos proposicionales
 - $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots, C_w$
- Siendo C_0 es el cálculo de propociciones clásico.

Algumas Lógicas Proposicionais

Lógica Implicativa Intuicionista

$$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

$$A, A \rightarrow B / B$$

Lógica Implicativa Clássica

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \text{ (Peirce)}$$

Lógica Positiva Clássica

Lógica Positiva Intuicionista

$$A \& B \rightarrow A$$

$$A \& B \rightarrow B$$

$$A \rightarrow (B \rightarrow A \& B)$$

$$A \rightarrow A \vee B$$

$$B \rightarrow A \vee B$$

$$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$$

Lógica Minimal de Johansson-Kolmogorov

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$$

Lógica Intuicionista de Brouwer-Heyting

$$A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$$

Lógica Clássica

$$A \vee \sim A$$

Esquema general de algunos cálculos de da Costa

M es una lógica paraconsistente de tipo (ii): vale PNC pelo no la RS.

$\vdash \sim(A \& \sim A)$
 $\vdash A \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B)$

Cálculo Minimal

M

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A)$

BH

$A \rightarrow (\sim A \rightarrow B)$

Lógica Proposicional Intuicionista

$\sim\sim A \rightarrow A$

Cálculo Proposicional Clássico

C_0

$C_0 = C_1 + \sim(A \& \sim A)$

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (Peirce)
 $\vdash \sim(A \& \sim A)$
 $\vdash A \rightarrow \sim\sim A$
 $\vdash A \& \sim A \rightarrow B$ (trivialização)

$\vdash A \& \sim A \rightarrow B$
 $\vdash \sim(A \& \sim A)$
 \vdash Peirce
 $\vdash A \rightarrow \sim\sim A$
 $\vdash A \vee \sim A$

$A^1 = A^0$
 $A^2 = (A^{00}) \rightarrow A^{00}$
 $A^{(n)} = A^0 \& A^0 \& \dots \& A^n$

$\vdash (B^{(n)} \& B \& \sim B) \rightarrow C$
 (trivialização)

Lógica Positiva Intuicionista

LPI

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
 $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
 $A, A \rightarrow B / B$

C_n

Hierarquia Paraconsistente

$A^{(n)} \& B^{(n)} \rightarrow ((A \& B)^{(n)} \& (A \vee B)^{(n)} \& (A \rightarrow B)^{(n)})$
 $B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A))$

C_w

(não é finitamente trivializável)

$\sim\sim A \rightarrow A$
 $A \vee \sim A$

C_1

$A^0 = \sim(A \& \sim A)$

$B \rightarrow ((A \& B)^0 \& (A \vee B)^0 \& (A \rightarrow B)^0)$
 $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \sim B) \rightarrow \sim A))$

$\vdash \sim A \& A \& \sim A \rightarrow B$ (trivialização)
 $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (Peirce)
 $\vdash A \rightarrow \sim\sim A$
 \vdash Pseudo-Scotus
 \vdash Silogismo Disjuntivo
 \vdash Contraposição irrestrita
 \vdash Subst, Equivalentes

$C_0, C_1, \dots, C_n, \dots, C_w$

- Una contradicción trivializa la lógica clásica: $\alpha \wedge \neg \alpha \rightarrow \beta$
- **Definición:** $\alpha 0 = \neg(\alpha \wedge \neg \alpha)$, $\alpha 00 = (\alpha 0) 0$ etc.
- El sistema C_1 no es trivializable por $\alpha \wedge \neg \alpha$ pero lo es por una fórmula del tipo $\alpha 0 \wedge \alpha \wedge \neg \alpha$
- C_2 es trivializable por $\alpha 00 \wedge \alpha \wedge \neg \alpha$
- Etc.
- C_w no es finitamente trivializable (por un número finito de fórmulas), o sea, no hay fórmula γ tal que $\gamma \vdash \alpha$ (o sea, $\vdash \gamma \rightarrow \alpha$) para α cualquier.
- En la jerarquía, cuanto más se anda para la derecha, más seguro se está con respecto a la trivialización (es “más difícil” trivializar el cálculo), pero se tienen cálculos cada vez más débiles (cada uno de ellos es más fuerte que su sucesor).
 - Cuanto más fuertes son los cálculos, más fácilmente se los trivializa.
- La fuerza expresiva de una lógica anda al par con los riesgos de trivialización.

Las otras jerarquías

- Lógica de Primera Orden
 - $C_{q0}, C_{q1}, \dots, C_{qn}, \dots, C_{qw}$
- Cálculos con descripciones
 - $D_0, D_1, \dots, D_n, \dots, D_w$
- Teorías de conjuntos
 - $NF_0, NF_1, \dots, NF_n, \dots, NF_w$
 - $ZF_0, ZF_1, \dots, ZF_n, \dots, ZF_w$
- *Todos los principales resultados metamatemáticos fueran obtenidos., como lo siguiente:*
- **Teorema (da Costa):** *Si ZF_1 es non-trivial, entonces ZF es consistente; si ZF es consistente, entonces ZF_1 es no-trivial.*
- Eso muestra que da Costa jamás deseó “destruir” la lógica clásica (como dice algunas personas), o decir que ella es “errada”. Para él, como para nosotros, las lógicas tienen un campo de aplicación, y en esos campos son perfectamente buenas para ciertas finalidades.
- En particular la lógica clásica es una estructura fantástica (aún que sea difícil decir en que consiste exactamente).

¿Es paraconsistente la silogística? (una cuestión para se pensar)

- Una lógica S
- Símbolos primitivos: a) una colección enumerable de términos simples (x,y,z,...); b) predicados binarios A, E, I, O.
- Las formulas son expresiones de la forma Aab, Iab, Eab, Oab.
- Formulas contradictorias: $C(Axy) = Oxy$; $C(Exy) = Ixy$; $C(Ixy) = Exy$, $C(Oxy) = Axy$.



- Las formas de inferencia de la primera figura (mas Baroco y Bocardo por simplicidad) son adoptadas como postulados de esa lógica, como por ejemplo:
- $Ayz, Axy / Axz$ (Barbara); $Azy, Oxy / Oxz$ (Baroco)

- Una interpretación para S
- $f : \{\text{términos}\} \rightarrow$ una colección de conjuntos no vacíos
- (intuitivamente, $f(x)$ es el conjunto de los objetos designados por x).
- El **valor verdad** de una fórmula X , denotado $v(X)$, es una función $v : \{\text{fórmulas}\} \rightarrow \{0,1\}$, tal que:
 - (i) $v(Axy) = 1$ syss $f(x) \subseteq f(y)$ [Todo x es un y].
 - (ii) $v(Exy) = 1$ syss $f(x) \cap f(y) = \emptyset$ [Ningún x es un y .]
 - (iii) $v(X) = 0$ syss $v(C(X)) = 1$
 - (iv) $v(X) = 1$ syss $v(C(X)) = 0$.
- Los conceptos de deducción, de modelo, etc. son dados de forma usual.

- Sean Axy y Oxy dos premisas (**contradictorias**).
- $Azy, Oxy / Oxz$ (Baroco)
- Por Baroco, obtenemos $Azy, Oxy / Oxx$, o sea, Oxx .
- Pero Oxx es falsa para toda interpretación.
- En efecto, como “(i) $v(Axy) = 1$ syss $f(x) \subseteq f(y)$ ”
- $F(Oxx) = 1$ syss $f(Axx) = 0$ syss $f(x) \not\subseteq f(x)$, lo que es imposible. **Luego, Oxx no se sigue de Azy y de Oxy .**
- De dos proposiciones contradictorias, no se deduce una fórmula cualquier. **La lógica S es paraconsistente.**
- ¿Es la silogística una lógica paraconsistente?

- Pienso que no, porque Oxx probablemente no sería aceptable para Aristóteles.
- – los términos de una proposición categórica deben ser distintos.
- La semántica que tenemos hoy es distinta de la de Aristóteles.
- Podemos decir que sistemas como S “reflecten” la silogística.
- Pero el resultado es interesante de cualquier modo.

Matemáticas Paraconsistentes

- Principio de L'Hospital: “Dos cantidades que difieren por una cantidad infinitesimal son iguales.”
- Un ejemplo sencillo: la derivada de $y=x^2$, o sea, $\Delta y/\Delta x$. Los pasos son (a la Newton).
- $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2$
- $\Delta y = 2x \Delta x + (\Delta x)^2$
- $\Delta y/\Delta x = 2x + \Delta x$ (estamos suponiendo que $\Delta x \neq 0$)
- Como Δx es un infinitesimal, aplicamos PL'H, y entonces
- $\Delta y/\Delta x = 2x$ (ahora, fue supuesto que $\Delta x = 0$).

- Los infinitesimales: banidos por Cauchy, Weierstrass y otros (siglo XIX), asta su reintroducción por A. Robinson en 1960.
- **Con adecuados sistemas paraconsistentes, podemos introducir infinitésimos y infinitos de diversos tipos y desarrollar una matemática paraconsistente.**
- Teorías de conjuntos con las antinomias, en particular con el “conjunto de Russell” $R = \{ x : x \notin x \}$.
- Chris Mortensen, D’Ottaviano, etc. – cálculo diferencial y integral paraconsistente.

Otras lógicas paraconsistentes

- Las lógicas relevantes
- Los sistemas de Priest
- Lógica Paraclásica (da Costa & Vernengo)
- Lógicas deónticas paraconsistentes
- Etc.

Verdade “empírica”

(Dalla Chiara & Toraldo di Francia)

- $F = m.a$

- Los conceptos físicos F , m y a dan origen a operadores que asumen valores en un intervalo real $[f - \varepsilon, f + \varepsilon]$.
- Todos esos son *valores aceptables* en la medida de los observables.
- Valores ‘aceptables’ de F : $p \in [f_1, f_2]$
- Valores de m : $q \in [m_1, m_2]$ y de a : $r \in [a_1, a_2]$
- Hay p_1, q_1, r_1 tales que $p_1 = q_1 \cdot r_1$
- Hay p_2, q_2, r_2 tales que $p_2 \neq q_2 \cdot r_2$
- Pero **no hay** p, q y r tales que $p = q \cdot r \wedge p \neq q \cdot r$
- Entonces $\models F = m.a$, pero también que $\models F \neq m.a$
- Pero **no tendremos** que $\models \neq F = m.a \wedge F \neq m.a$
- **Lógicas paraclásicas** (da Costa & Vernengo): de α y β no deduce en general la conjunción $\alpha \wedge \beta$
- De α y $\neg\alpha$, **no** obtenemos $\alpha \wedge \neg\alpha$.

Aplicaciones a la tecnología

- **Lógicas Anotadas** : Blair & Subrahmanian 1987; da Costa, Lu, etc.
- Akama, Nakamatsu, Abe, Barreto, etc.
- **Sistemas expertos** en medicina, ingeniería, robótica, controle de calidad, sistemas de electricidad, etc.
- Sistemas envolviendo datos imprecisos y vagos
- Simulación alternativa de situaciones *fuzzy*.

Dos acontecimientos

- 1) Los congresos mundiales de paraconsistencia *(World Congresses on Paraconsistency)
- 1997 (Gent)
- 2000 (Juquehy, Brasil)
- 2003 (Toulouse)
- 2008 (Melbourne)
- Hoy la paraconsistencia es un campo del conocimiento, y no se reduce al estudio de algunos (mismo que infinitos) sistemas lógicos.

MSC 2010

- 2) 1990 Mathematics Subject Classification
 - 03B53 Paraconsistent Logics
- 2000
- 03B53 Logics admitting inconsistency (paraconsistent logics, discussive logics, etc.)
- **Propuesta:** que 03B53 vuelva a ser solamente “Paraconsistent Logics” en la MSC 2010.
 - www.msc2010.org/msc-feedback.php
 - Muchas Gracias